

«مقاله پژوهشی»

محاسبه ضرایب تمرکز دینامیکی ناشی از امواج طولی و برشی در محیط الاستیک دارای ناخالصی کرولی پیزوالکتریک

محسن غلامی¹، محمدطاهر کمالی^{2*}، بابک شکرالهی زاده³

1. مربی، گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه هرمزگان، بندرعباس، ایران
2. دانشیار، گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه هرمزگان، بندرعباس، ایران
3. استادیار، گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه هرمزگان، بندرعباس، ایران

تاریخ دریافت: 1401/09/01 تاریخ پذیرش: 1401/11/02

Calculation of Dynamic Concentration Factors Due to Longitudinal and Shear Waves in an Elastic Medium with a Spherical Piezoelectric Impurity

M. Gholami¹, M.T. Kamali^{2*}, B. Shokrolahi-Zadeh³

1. Lecturer, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, University of Hormozgan, Bandar Abbas, Iran
2. Associate Professor, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, University of Hormozgan, Bandar Abbas, Iran
3. Assistant Professor, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, University of Hormozgan, Bandar Abbas, Iran

Received: 2022/11/22 Accepted: 2023/01/22

Abstract

The electromechanical coupling behavior of composite piezoelectric materials plays an important role in various industries. Therefore, it is necessary to investigate and study the propagation and scattering of waves in such materials in order to understand their properties and dynamic behavior. In this study, using an exact analytical method, electromechanical fields due to the scattering of plane waves by a piezoelectric spherical particle with spherical isotropic embedded in an unlimited isotropic polymer matrix has been studied. In the present formulation, there is no restriction on the range of the frequency of the incident wave. The dynamic stress concentration factors and the dynamic electric displacement concentration factor at the piezoelectric particle-matrix interface were calculated. Subsequently, the effect of the frequency of the incident wave on the maximum values of the dynamic stress concentration factors and maximum value of the dynamic electric displacement concentration factor as well as their appurtenant locations for shear and longitudinal waves compared.

Keywords

Longitudinal Waves; Shear Waves; Spherical Piezoelectric Particle; Dynamic Stress Concentration Factor; Dynamic Electric Displacement Concentration Factor

چکیده

رفتار جفت‌شدگی الکترومکانیکی مواد پیزوالکتریک مرکب در صنایع مختلف نقش مهمی دارد. بررسی و مطالعه انتشار و پراکندگی امواج در چنین موادی برای درک خصوصیات و رفتار دینامیکی آنها ضروری است. در این پژوهش با استفاده از یک روش تحلیلی دقیق، میدان‌های الکترومکانیکی ناشی از پراکندگی امواج صفحه‌ای توسط یک ذره کرولی پیزوالکتریک دارای همسانگرد کرولی تعبیه شده در یک محیط پلیمری همسانگرد نامحدود مورد مطالعه قرار گرفته است. در فرمول ارائه شده هیچ محدودیتی در محدوده فرکانس موج ورودی وجود ندارد. ضرایب تمرکز تنش دینامیکی و ضریب تمرکز جابه‌جایی الکتریکی دینامیکی در سطح مشترک ذره پیزوالکتریک و محیط محاسبه شده‌اند. سپس، اثر فرکانس موج ورودی بر مقادیر حداکثر ضرایب تمرکز تنش دینامیکی و مقدار حداکثر ضریب تمرکز جابه‌جایی الکتریکی دینامیکی و همچنین مکان‌های وابسته به آنها برای امواج برشی و طولی مقایسه شده‌اند.

واژه‌های کلیدی

امواج طولی، امواج برشی، ذره پیزوالکتریک کرولی، ضریب تمرکز تنش دینامیکی، ضریب تمرکز جابه‌جایی الکتریکی دینامیکی

مقدمه

نوع خاصی از مواد وجود دارد که وقتی تحت نیروی کششی یا فشاری قرار می‌گیرد، کرنش ایجاد شده در آنها باعث قطبی شدن این مواد می‌شود و ایجاد میدان الکتریکی می‌کند و بالعکس اگر این مواد خاص در یک میدان الکتریکی قرار گیرند، در آنها تغییر شکل ایجاد می‌شود. به این دو خاصیت الکترومکانیکی، اثر پیزوالکتریک می‌گویند. در این گونه مواد که خصوصیات پیزوالکتریک از خود نشان می‌دهند، کمیت‌های مکانیکی نظیر تنش‌ها و کرنش‌ها با کمیت‌های الکتریکی نظیر میدان الکتریکی و جابه‌جایی الکتریکی ارتباط پیدا می‌کند. رفتار جفت‌شدگی الکترومکانیکی مواد پیزوالکتریک در صنایع مختلف از جمله صنایع الکترونیک، صنایع خودرویی و صنایع هوایی و توسعه بسیاری از دستگاه‌های الکترومکانیکی مختلف مانند حسگر یا محرک در ساختارهای هوشمند، ژنراتورهای آلتراسونیک¹، پالس اکوپزشکی، تصویربرداری آلتراسونیک و غیره نقش مهمی دارد. یک نمونه از این مواد، ماده پیزوالکتریک مرکب است که از یک شبکه پلیمر با ذرات کروی پیزوالکتریک ساخته می‌شود. بررسی و مطالعه انتشار و پراکندگی امواج در چنین موادی برای درک خصوصیات و رفتار دینامیکی آنها ضروری می‌باشد.

تا کنون مطالعات زیادی در زمینه انتشار امواج در محیط دربردارنده یک ناهمگنی الاستیک انجام شده است. پاسکارامورتی و همکاران [1] با استفاده از یک روش تحلیلی، پاسخ کامپوزیت‌های تقویت‌شده با ذره کروی تحت بارگذاری دینامیکی متقارن محوری را محاسبه کردند و ضرایب تمرکز تنش دینامیکی را در مرز مشترک محیط-ذره کروی به دست آوردند. فانگ و همکاران [2] بر اساس نظریه الاستودینامیک²، پراکندگی چندگانه امواج الاستیک و تنش دینامیکی در سیستم کامپوزیت تقویت‌شده با دو ذره کروی را بررسی و بیان تحلیلی میدان‌های موج در هر محیط را ارائه دادند. بوگارین و همکاران [3] اثر هندسه و خصوصیات مواد بر میدان تنش دینامیکی در محیط مسلح به ذرات کروی را بررسی کردند. آنها تمرکز تنش در اطراف ذره کروی که در یک محیط الاستیک جاسازی شده و

تحت بار دینامیکی نامتقارن قرار دارد را مورد مطالعه قرار دادند. رو و همکاران [4] به مطالعه اثر سطح بر پراکندگی چندگانه امواج برشی قائم توسط یک گروه از حفره‌های استوانه‌ای با مقیاس نانو پرداختند. هنگامی که شعاع حفره‌ها به نانومتر کاهش می‌یابد، اثرات سطحی نقش مهمی در عملکرد مکانیکی آنها ایفا می‌کند. لیو و همکاران [5] پراکندگی امواج فشاری و برشی توسط یک نانوفیبر³ تعبیه شده در یک ماده ایزوتروپ⁴ نامحدود و پراکندگی چندگانه توسط نانوفیبرهای مرتب شده در یک جهت را با در نظر گرفتن اثرات سطح مشترک مورد مطالعه قرار دادند. امواج صفحه‌ای فشاری و برشی ورودی عمود بر محور فیبر هستند. یان [6] اثر سطح در پراکندگی چندگانه امواج فشاری و برشی توسط یک گروه از حفره‌های استوانه‌ای با مقیاس نانو که به شکل چهار گوش مرتب شده‌اند را مورد مطالعه قرار داد. آنها از نظریه الاستیسیته⁵ سطح برای تجزیه و تحلیل انتشار موج استفاده کردند. قانع‌محمدی و حسینی‌تهرانی [7، 8] اثر الاستیسیته سطح بر پراکندگی امواج فشاری و برشی الاستیک توسط یک نانوفیبر تعبیه شده در یک محیط را مورد بررسی قرار دادند. آنها در این تحقیق یک ناحیه بین فازی⁶ ناهمگن بین نانوفیبر و محیط در نظر گرفتند. با تقسیم ناحیه بین فازی به زیر لایه‌های همگن، اثرات الاستیسیته سطح در لایه‌های مجاور محیط و نانوفیبر را مورد مطالعه قرار دادند. نتایج حاکی از این است که در نظر گرفتن اثرات الاستیسیته سطح در مسائل پراکندگی موج از بین فازهای ناهمگن تأثیر عمده‌ای بر نتایج نشان می‌دهد. کنون و همکاران [9] پراکندگی امواج طولی برای یک ناهمگنی کروی پروالاستیک⁷ همسانگرد تعبیه شده در یک محیط پروالاستیک همسانگرد نامحدود را مورد بررسی قرار دادند. جعفرزاده و همکاران [10] پراکندگی امواج طولی الاستیک توسط یک ناهمگنی کروی الاستیک همسانگرد جانبی تعبیه شده در یک محیط الاستیک همسانگرد را مورد مطالعه قرار دادند. آنها با گسترش میدان

3. Nanofiber

4. Isotropic

5. Elasticity

6. Interphase

7. Poroelastic

1. Ultrasonic

2. Elastodynamic

زمانی قرار گرفته است، ارائه دادند. فانگ و همکاران [19] با استفاده از روش سطح- سطح مشترک الکتروالاستیک برای ساختارهای با مقیاس نانو، پاسخ الکترومکانیکی نانو سیلندرهای پیزوالکتریک چند لایه تحت اثر امواج الکتروالاستیک را مورد بررسی قرار داده و تأثیر انرژی سطح مشترک در تنش و میدان الکتریکی را مطرح کردند. برای بیان میدان ترکیب الکتروالاستیک، روش گسترش تابع موج معرفی شده است. در سطح مشترک هر لایه، شرایط مرزی با در نظر گرفتن انرژی سطح مشترک داده شده است. کو و همکاران [20] پراکندگی چندگانه امواج برشی خارج از صفحه در یک کامپوزیت فیبری⁵ FGM را مورد مطالعه قرار دادند. این کامپوزیت از استوانه‌های دایره‌ای با توزیع دلخواه و اندازه و مواد تشکیل‌دهنده متفاوت تشکیل شده است. استوانه‌ها در امتداد جهت شعاعی درجه‌بندی می‌شوند. غفراللهی و شجاع [21] یک فیبر پیزوالکتریک مدفون در نزدیکی سطح آزاد یک نیمه فضای پیزوالکتریک با خواص الکترومکانیکی متغیر در معرض امواج سطحی عرضی را در نظر گرفتند. آنها با استفاده از روش بسط چند قطبی، راه‌حل تحلیلی برای میدان‌های پراکنده به دست آوردند. جم و شجاع [22] تابش الکترومغناطیسی ناشی از یک نانوفیبر پیزوالکتریک تعبیه شده در محیطی با خواص پیزوالکتریک مختلف را که در معرض امواج برشی قرار دارد، مورد مطالعه قرار دادند. برای در نظر گرفتن اثر سطح، آنها مسئله را بر اساس نظریه الاستیسیته سطح- سطح مشترک فرموله کردند. کی و همکاران [23] تحلیل دینامیکی مصالح پیزوالکتریک دارای یک سوراخ بیضوی تحت اثر امواج برشی خارج از صفحه را مورد مطالعه قرار دادند. آنها به اثرات پارامترهای مختلف بر روی ضریب تمرکز تنش دینامیکی در اطراف سوراخ پرداختند. غلامی و همکاران [24] با استفاده از یک روش تحلیلی دقیق، پراکندگی امواج برشی توسط ذره پیزوالکتریک کروی تعبیه شده در محیط پلیمر الاستیک همسانگرد نامحدود را مورد مطالعه قرار دادند.

در این تحقیق، بر اساس کارهای انجام شده در مراجع [4، 24]، فرمول‌بندی مساله انتشار موج در حالت دلخواه صفحه‌ای ناشی از وجود یک ناخالصی کروی پیزوالکتریک

جابه جایی بر حسب هارمونیک‌های¹ کروی، راه‌حل تحلیلی برای امواج فرکانس پایین ارائه کردند.

فعالیت‌های روزافزونی در راستای انتشار امواج در یک محیط دربردارنده ناهمگنی پیزوالکتریکی وجود دارد. مائو و وانگ [11] مسئله پراکندگی امواج الکتروالاستیک² را برای یک ناخالصی پیزوالکتریک بیضوی قرار گرفته شده در محیط پیزوالکتریک نامحدود بررسی کردند. محیط و ناخالصی بصورت همسانگرد جانبی در نظر گرفته شده‌اند. کیویان و همکاران [12، 13] رفتار پراکندگی امواج الاستیک طولی در کامپوزیت‌های حاوی استوانه پیزوالکتریک با محیط پلیمری نامحدود را مورد مطالعه قرار دادند. آنها از روش بسط تابع موج استفاده کردند. کمالی و شجاع [14] به مطالعه پراکندگی امواج طولی توسط یک ذره پیزوالکتریک کروی در یک محیط پلیمری پرداختند. آنها ذرات پیزوالکتریک همسانگرد کروی و محیط الاستیک همسانگرد را در نظر گرفتند و اثرات پیزوالکتریک را روی سطح مقطع پراکندگی کلی و جزئی و همچنین میدان‌های الکترومکانیکی بررسی کردند. بعدا کمالی و شجاع [15] کار ارائه شده در کمالی و شجاع [14] را برای نمونه‌ای که ذره کروی دارای پوشش مواد پیزوالکتریک مدرج تابعی (FPGM)³ است، گسترش دادند. فانگ و همکاران [16] موردی را در نظر گرفتند که در آن یک فیبر پیزوالکتریک دایره‌ای در داخل یک لایه FGPM با ضخامت محدود تعبیه شده است که به نیم فضای پیزوالکتریک متصل است. آنها پیکربندی توصیف شده را در معرض امواج برشی قرار دادند و میدان‌های پراکنده را مورد مطالعه قرار دادند. شجاع و همکاران [17] روش اینکولوژن⁴ معادل الکترومکانیکی دینامیکی را برای فرمول‌بندی میدان‌های پراکنده الکتروالاستیک یک موج برشی بر روی یک حسگر پیزوالکتریک دایره‌ای دو فازی خارج از مرکز احاطه شده توسط یک محیط پیزوالکتریک بی‌نهایت توسعه دادند. شی و وان [18] تابع دوبعدی دینامیکی گرین را برای یک ناهمگنی پیزوالکتریک استوانه‌ای که به طور ناقص به یک محیط پیزوالکتریک نامحدود که تحت بارگذاری هارمونیک

1. Harmonics
2. Electroelastic
3. Functionally Graded Piezoelectric Material
4. Inclusion

$$\mathbf{u}^{(I)}(z, t) = u_0 e^{i(K_S z - \omega t)} \mathbf{e}_x + w_0 e^{i(K_P z - \omega t)} \mathbf{e}_z \quad (1)$$

که در اینجا u_0 و w_0 به ترتیب دامنه موج برشی و طولی و $i = \sqrt{-1}$ هستند. از این به بعد بالانویس‌های (I) ، (S) و (P) به ترتیب نشان‌دهنده موج ورودی، پراکنده و انتقالی به ذره هستند. K_P و K_S به ترتیب عدد موج برشی و طولی هستند و از رابطه زیر به دست می‌آیند:

$$K_S = \frac{\omega}{c_s}, K_P = \frac{\omega}{c_p}, C_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, C_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (2)$$

که C_S و C_P به ترتیب سرعت موج برشی و طولی در محیط هستند. هنگامی که موج به ذره برخورد می‌کند، یک موج که به طرف محیط پراکنده می‌شود و یک موج انتقالی که وارد ذره می‌شود، ایجاد می‌شود. بنابراین میدان جابه جایی به صورت زیر قابل بیان است:

$$\mathbf{u} = \begin{cases} \mathbf{u}^{(P)}, & r < a \\ \mathbf{u}^{(I)} + \mathbf{u}^{(S)}, & r \geq a \end{cases} \quad (3)$$

به همین ترتیب پتانسیل الکتریکی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\Phi = \begin{cases} \Phi^{(P)}, & r < a \\ \Phi^{(S)}, & r \geq a \end{cases} \quad (4)$$

چون موج ورودی هارمونیک است، بنابراین میدان جابه جایی و پتانسیل الکتریکی پراکنده و انتقالی نیز هارمونیک هستند و برای راحتی، ترم $e^{-i\omega t}$ در توابع الکترومکانیکی نشان داده نمی‌شود.

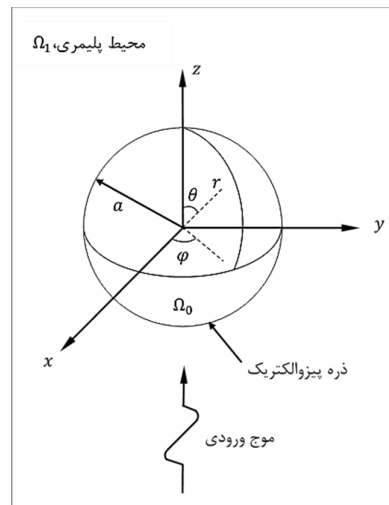
میدان‌های موج ورودی

با توجه به روابط ساختاری برای محیط پلیمری الاستیک، روابط کرنش-جابه‌جایی و روابط میدان جابه‌جایی ناشی از موج ورودی بر اساس مقالات مراجع [24-28]، مؤلفه‌های میدان تنش به صورت زیر به دست می‌آید:

با خاصیت همسانگرد کروی ارایه شده است. در حالت امواج برشی و طولی، اثر فرکانس موج ورودی بر مقادیر حداکثر ضرایب تمرکز تنش دینامیکی و مقدار حداکثر ضریب تمرکز جابه‌جایی الکتریکی دینامیکی و همچنین مکان‌های وابسته به آن‌ها مورد بررسی قرار گرفته و به مقایسه آنها پرداخته شده است.

شرح مسئله و معادلات حاکم بر مسئله

مدل مورد مطالعه در این بخش در شکل 1 نشان داده شده است. در این مدل یک ذره پیزوالکتریک کروی، Ω_0 با شعاع a در یک محیط پلیمر الاستیک بی‌نهایت، Ω_1 تعبیه شده است. مراکز دستگاه‌های مختصات دکارتی (x, y, z) و کروی (r, θ, φ) و مرکز کره بر هم منطبق هستند. محیط پلیمر، همسانگرد و ذره پیزوالکتریک، همسانگرد کروی است.



شکل 1. ذره پیزوالکتریک کروی تعبیه شده در محیط پلیمری الاستیک نامحدود تحت اثر موج صفحه‌ای هارمونیک

در دستگاه مختصات کروی، روابط ساختاری برای ذره پیزوالکتریک و محیط پلیمر الاستیک، روابط کرنش-جابه‌جایی، روابط میدان الکتریکی-پتانسیل الکتریکی، معادلات حرکت و معادله بار الکترواستاتیک مطابق روابط بیان شده در مقاله مرجع [14] در نظر گرفته شده است. یک موج صفحه‌ای ورودی با فرکانس ω که در امتداد محور z در حال انتشار است، در نظر گرفته می‌شود.

میدان‌های الکترومکانیکی پراکنده

با برخورد موج ورودی به ذره، یک موج که به طرف محیط پراکنده می‌شود، به وجود می‌آید. میدان جابه جایی ناشی از موج پراکنده بر اساس مقالات مراجع [24-28] بیان می‌شود.

تابع پتانسیل الکتریکی پراکنده، $\Phi^{(S)}$ یک تابع هارمونیک به صورت زیر است [14]:

$$\begin{aligned} \Phi^{(S)}(r, \theta, \varphi) &= \cos \varphi \sum_{n=1}^{\infty} D_n^{(1)} r^{-(n+1)} P_n^1(\cos \theta) \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} D_n^{(2)} r^{-(n+1)} P_n(\cos \theta) \end{aligned} \quad (6)$$

که در آن $D_n^{(1)}$ و $n = 1, 2, \dots$ و $D_n^{(2)}$ و $n = 0, 1, 2, \dots$ ثابت‌های مجهول هستند.

با توجه به روابط ساختاری برای محیط پلیمری الاستیک، روابط کرنش-جابه‌جایی و میدان الکتریکی-پتانسیل الکتریکی، روابط میدان جابه‌جایی ناشی از موج پراکنده و رابطه (6)، میدان‌های تنش و جابه‌جایی الکتریکی به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(S)} &= \cos \varphi \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n^{(1)} \frac{2\mu}{r^2} \left[(n^2 - n - \frac{1}{2}(K_S r)^2) h_n(K_p r) + 2K_p r h_{n+1}(K_p r) \right] \right. \\ &+ C_n^{(1)} \frac{2\mu}{r^2} n(n+1) [(n-1)h_n(K_S r) - K_S r h_{n+1}(K_S r)] \left. \right\} P_n^1(\cos \theta) \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_n^{(2)} \frac{2\mu}{r^2} \left[(n^2 - n - \frac{1}{2}(K_S r)^2) h_n(K_p r) + 2K_p r h_{n+1}(K_p r) \right] \right. \\ &+ C_n^{(2)} \frac{2\mu}{r^2} n(n+1) [(n-1)h_n(K_S r) - K_S r h_{n+1}(K_S r)] \left. \right\} P_n(\cos \theta) \end{aligned} \quad (7-f)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(I)} &= u_0 \cos \varphi \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -i^{n+1} \frac{2n+1}{K_S} \left(\frac{2\mu}{r^2} \right) [(n-1)j_n(K_S r) - K_S r j_{n+1}(K_S r)] \right\} P_n^1(\cos \theta) + \\ &w_0 \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \left(\frac{2\mu}{r^2} \right) \left[(n^2 - n - \frac{1}{2}(K_S r)^2) j_n(K_p r) + 2K_p r j_{n+1}(K_p r) \right] P_n(\cos \theta) \end{aligned} \quad (5-f)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta}^{(I)} &= u_0 \cos \varphi \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -i^{n+1} \frac{2n+1}{K_S n(n+1)} \left(\frac{2\mu}{r^2} \right) \left[(n^2 - 1 - \frac{1}{2}(K_S r)^2) j_n(K_S r) + K_S r j_{n+1}(K_S r) \right] \right\} \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} \\ &+ i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(\frac{\mu}{r} \right) [(n-1)j_n(K_S r) - K_S r j_{n+1}(K_S r)] \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta} \\ &+ w_0 \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \left(\frac{2\mu}{r^2} \right) [(n-1)j_n(K_p r) - K_p r j_{n+1}(K_p r)] \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} \end{aligned} \quad (5-b)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r\varphi}^{(I)} &= -u_0 \sin \varphi \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(\frac{\mu}{r} \right) [(n-1)j_n(K_S r) - K_S r j_{n+1}(K_S r)] \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} \\ &+ \left\{ -i^{n+1} \frac{2n+1}{K_S n(n+1)} \left(\frac{2\mu}{r^2} \right) \left[(n^2 - 1 - \frac{1}{2}(K_S r)^2) j_n(K_S r) + K_S r j_{n+1}(K_S r) \right] \right\} \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta} \end{aligned} \quad (5-c)$$

در این اینجا μ ثابت لامه محیط، σ_{ij} و $i, j = r, \theta, \varphi$ مولفه‌های تانسور تنش، j_n تابع بسل کروی مرتبه n ام از نوع اول و P_n و P_n^1 به ترتیب تابع لژاندر و تابع لژاندر وابسته مرتبه n ام از نوع اول هستند.

بالانویس‌های (1) و (2) به ترتیب نشان‌دهنده موج برشی و طولی هستند. h_n تابع هنکل کروی مرتبه n ام از نوع اول، D_i و $i = r, \theta, \varphi$ مولفه‌های تانسور جابه‌جایی الکتریکی و κ ثابت دی‌الکتریک محیط است. ثابت‌های $A_n^{(1)}, B_n^{(1)}, C_n^{(1)}$ و $n = 1, 2, \dots$ و ثابت‌های $A_n^{(2)}, B_n^{(2)}, C_n^{(2)}$ و $n = 0, 1, 2, \dots$ ضرایب مجهول هستند که از شرایط مرزی به دست می‌آیند.

میدان‌های الکترومکانیکی درون ذره پیزوالکتریک

به منظور به‌دست آوردن راه‌حل تحلیلی برای میدان‌های الکترومکانیکی درون ذره پیزوالکتریک، جابه‌جایی‌های $u_r^{(P)}, u_\theta^{(P)}, u_\varphi^{(P)}$ بر اساس توابع جابه‌جایی $W(r, \theta, \varphi), G(r, \theta, \varphi)$ و $\Psi(r, \theta, \varphi)$ معرفی می‌شوند [14, 24, 29, 30]:

$$\begin{aligned} u_r^{(P)} &= W, \\ u_\theta^{(P)} &= -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} - \frac{\partial G}{\partial \theta}, \\ u_\varphi^{(P)} &= \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial G}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (8)$$

توابع جابه‌جایی W, G و Ψ و پتانسیل الکتریکی Φ به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} \Psi(r, \theta, \varphi) &= \Psi^{(1)}(r, \theta, \varphi) + \Psi^{(2)}(r, \theta, \varphi) \\ &= \sin \varphi \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\Psi}_n^{(1)}(r) P_n^1(\cos \theta) \end{aligned} \quad (9-الف)$$

$$\begin{aligned} G(r, \theta, \varphi) &= G^{(1)}(r, \theta, \varphi) + G^{(2)}(r, \theta, \varphi) \\ &= \cos \varphi \sum_{n=1}^{\infty} \bar{G}_n^{(1)}(r) P_n^1(\cos \theta) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \bar{G}_n^{(2)}(r) P_n(\cos \theta) \end{aligned} \quad (9-ب)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta}^{(S)} &= \cos \varphi \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n^{(1)} \frac{2\mu}{r^2} [(n-1)h_n(K_p r) - K_p r h_{n+1}(K_p r)] + C_n^{(1)} \frac{2\mu}{r^2} \left[(n^2 - 1 - \frac{1}{2}(K_s r)^2) h_n(K_s r) + K_s r h_{n+1}(K_s r) \right] \right\} \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} \\ &+ B_n^{(1)} \frac{\mu}{r} [(n-1)h_n(K_s r) - K_s r h_{n+1}(K_s r)] \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta} \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_n^{(2)} \frac{2\mu}{r^2} [(n-1)h_n(K_p r) - K_p r h_{n+1}(K_p r)] + C_n^{(2)} \frac{2\mu}{r^2} \left[(n^2 - 1 - \frac{1}{2}(K_s r)^2) h_n(K_s r) + K_s r h_{n+1}(K_s r) \right] \right\} \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} \end{aligned} \quad (7-ب)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r\varphi}^{(S)} &= -\sin \varphi \sum_{n=1}^{\infty} B_n^{(1)} \frac{\mu}{r} [(n-1)h_n(K_s r) - K_s r h_{n+1}(K_s r)] \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} \\ &+ \left\{ A_n^{(1)} \frac{2\mu}{r^2} [(n-1)h_n(K_p r) - K_p r h_{n+1}(K_p r)] + C_n^{(1)} \frac{2\mu}{r^2} \left[(n^2 - 1 - \frac{1}{2}(K_s r)^2) h_n(K_s r) + K_s r h_{n+1}(K_s r) \right] \right\} \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta} \end{aligned} \quad (7-ج)$$

$$\begin{aligned} D_r^{(S)} &= \cos \varphi \sum_{n=1}^{\infty} D_n^{(1)} k(n) \\ &+ 1) r^{-(n+2)} P_n^1(\cos \theta) \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} D_n^{(2)} k(n) \\ &+ 1) r^{-(n+2)} P_n(\cos \theta) \end{aligned} \quad (7-د)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta}^{(P)} &= \left[\frac{C_{44}}{r} \bar{W}_0^{(2)}(r) + \frac{e_{15}e_{33}}{r\kappa_{33}} \bar{\Phi}_0^{(2)}(r) \right] \frac{dP_0(\cos\theta)}{d\theta} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \cos\varphi \left\{ \left[\frac{C_{44}}{r} \left(\bar{W}_n^{(1)}(r) - r \frac{d\bar{G}_n^{(1)}(r)}{dr} + \bar{G}_n^{(1)}(r) \right) \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{e_{15}e_{33}}{r\kappa_{33}} \bar{\Phi}_n^{(1)}(r) \right] \frac{dP_n^1(\cos\theta)}{d\theta} - \frac{C_{44}}{r} \left(r \frac{d\bar{\Psi}_n^{(1)}(r)}{dr} - \bar{\Psi}_n^{(1)}(r) \right) \frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} \right\} \\ &+ \left[\frac{C_{44}}{r} \left(\bar{W}_n^{(2)}(r) - r \frac{d\bar{G}_n^{(2)}(r)}{dr} + \bar{G}_n^{(2)}(r) \right) \right. \\ &\left. + \frac{e_{15}e_{33}}{r\kappa_{33}} \bar{\Phi}_n^{(2)}(r) \right] \frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta} \end{aligned} \quad (10-ب)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r\varphi}^{(P)} &= \sin\varphi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{44}}{r} \left(r \frac{d\bar{\Psi}_n^{(1)}(r)}{dr} - \bar{\Psi}_n^{(1)}(r) \right) \frac{dP_n^1(\cos\theta)}{d\theta} \\ &- \left[\frac{C_{44}}{r} \left(\bar{W}_n^{(1)}(r) - r \frac{d\bar{G}_n^{(1)}(r)}{dr} + \bar{G}_n^{(1)}(r) \right) \right. \\ &\left. + \frac{e_{15}e_{33}}{r\kappa_{33}} \bar{\Phi}_n^{(1)}(r) \right] \frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} \end{aligned} \quad (10-ج)$$

$$\begin{aligned} W(r, \theta, \varphi) &= W^{(1)}(r, \theta, \varphi) + W^{(2)}(r, \theta, \varphi) \\ &= \cos\varphi \sum_{n=1}^{\infty} \bar{W}_n^{(1)}(r) P_n^1(\cos\theta) \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \bar{W}_n^{(2)}(r) P_n(\cos\theta) \end{aligned} \quad (9-ح)$$

$$\begin{aligned} \Phi(r, \theta, \varphi) &= \Phi^{(1)}(r, \theta, \varphi) + \Phi^{(2)}(r, \theta, \varphi) \\ &= \frac{e_{33}}{\kappa_{33}} \left\{ \cos\varphi \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\Phi}_n^{(1)}(r) P_n^1(\cos\theta) \right. \\ &\left. + \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\Phi}_n^{(2)}(r) P_n(\cos\theta) \right\} \end{aligned} \quad (9-د)$$

به دلیل اینکه برای $n=0$ تابع $G^{(2)}(r, \theta, \varphi)$ افزایشی در هیچ نوع میدانی ایجاد نمی‌کند. بنابراین سری در تابع $G^{(2)}(r, \theta, \varphi)$ از $n=1$ شروع می‌شود، یعنی در $n=0$ مقدار $\bar{G}_0^{(2)}(r) = 0$ است [14]. با جایگذاری روابط (9-الف) تا (9-د) در روابط (8)، میدان جابه‌جایی ناشی از موج انتقالی درون ذره کروی به دست می‌آید.

با توجه به روابط ساختاری برای ذره پیزوالکتریک، روابط کرنش-جابه‌جایی، روابط میدان الکتریکی-پتانسیل الکتریکی و روابط میدان جابه‌جایی ناشی از موج انتقالی درون ذره کروی، میدان‌های تنش و جابه‌جایی الکتریکی ناشی از موج انتقالی درون ذره کروی به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(P)} &= \left[\frac{2C_{13}}{r} \bar{W}_0^{(2)}(r) + C_{33} \frac{d\bar{W}_0^{(2)}(r)}{dr} \right. \\ &\left. + \frac{e_{33}^2}{\kappa_{33}} \frac{d\bar{\Phi}_0^{(2)}(r)}{dr} \right] P_0(\cos\theta) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \cos\varphi \left[\frac{C_{13}}{r} (2\bar{W}_n^{(1)}(r) + n(n+1)\bar{G}_n^{(1)}(r)) + C_{33} \frac{d\bar{W}_n^{(1)}(r)}{dr} \right. \\ &\left. + \frac{e_{33}^2}{\kappa_{33}} \frac{d\bar{\Phi}_n^{(1)}(r)}{dr} \right] P_n^1(\cos\theta) \\ &+ \left[\frac{C_{13}}{r} (2\bar{W}_n^{(2)}(r) + n(n+1)\bar{G}_n^{(2)}(r)) + C_{33} \frac{d\bar{W}_n^{(2)}(r)}{dr} \right. \\ &\left. + \frac{e_{33}^2}{\kappa_{33}} \frac{d\bar{\Phi}_n^{(2)}(r)}{dr} \right] P_n(\cos\theta) \end{aligned} \quad (10-الف)$$

توابع $\bar{W}_0^{(2)}(r)$ و $\bar{\Phi}_0^{(2)}(r)$ با ضرایب مجهول $H_0^{j(1)}$ ، $j = 1, 2$ به دست می‌آیند.

شرایط مرزی و تعیین ضرایب مجهول

برای مسئله مورد بررسی میدان الکترومکانیکی در سطح بین ذره و محیط ($r = a$) باید پیوسته باشند، بنابراین شرایط مرزی مطابق مقالات ارائه شده در مراجع [14، 15]، [24] تعریف می‌شوند.

با توجه به تعامد توابع لژاندر وابسته، شرایط پیوستگی در سطح مشترک ذره و محیط منجر به دستگاه معادلات جبری خطی مجزا بر حسب ضرایب مجهول زیر می‌شود.

$$\begin{aligned} b_{30}^T &= \{A_0^{(2)} \quad D_0^{(2)} \quad H_0^{1(2)} \quad H_0^{2(2)}\} \\ b_{1n}^T &= \{A_n^{(1)} \quad C_n^{(1)} \quad D_n^{(1)} \quad H_n^{1(1)} \quad H_n^{2(1)} \quad H_n^{3(1)}\}, \\ &n = 1, 2, \dots \\ b_{2n}^T &= \{B_n^{(1)} \quad \bar{B}_n^{(1)}\}, \\ &n = 1, 2, \dots \\ b_{3n}^T &= \{A_n^{(2)} \quad C_n^{(2)} \quad D_n^{(2)} \quad H_n^{1(2)} \quad H_n^{2(2)} \quad H_n^{3(2)}\}, \\ &n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (11)$$

با حل این دستگاه‌ها، ضرایب مجهول به دست می‌آیند.

نتایج عددی و بحث

برای تحلیل، استخراج نتایج و رسم نمودارها از نرم‌افزار *Mathematica* استفاده شده است. در این بخش ابتدا به مقایسه نتایج با کار ارائه شده توسط پاسکارامورتی و همکاران [1] پرداخته شده است. در تحقیق انجام شده توسط پاسکارامورتی و همکاران، محیط و ذره الاستیک و همسانگرد هستند. برای مقایسه، مقادیر زیر برای پارامترها در نظر گرفته شده است:

$$\begin{aligned} \frac{\mu^P}{\mu^M} &= 8, \\ \nu^P &= \nu^M = 0.3, \\ \frac{\rho^P}{\rho^M} &= 1, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} D_r^{(P)} &= \left[\frac{2e_{31}}{r} \bar{W}_0^{(2)}(r) + e_{33} \frac{d\bar{W}_0^{(2)}(r)}{dr} \right. \\ &\quad \left. - e_{33} \frac{d\bar{\Phi}_0^{(2)}(r)}{dr} \right] P_0(\cos \theta) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \cos \varphi \left[\frac{e_{31}}{r} (2\bar{W}_n^{(1)}(r)) \right. \\ &\quad \left. + n(n+1)\bar{G}_n^{(1)}(r) + e_{33} \frac{d\bar{W}_n^{(1)}(r)}{dr} \right. \\ &\quad \left. - e_{33} \frac{d\bar{\Phi}_n^{(1)}(r)}{dr} \right] P_n^1(\cos \theta) \\ &\quad + \left[\frac{e_{31}}{r} (2\bar{W}_n^{(2)}(r) + n(n+1)\bar{G}_n^{(2)}(r)) \right. \\ &\quad \left. + e_{33} \frac{d\bar{W}_n^{(2)}(r)}{dr} - e_{33} \frac{d\bar{\Phi}_n^{(2)}(r)}{dr} \right] P_n(\cos \theta) \end{aligned} \quad (10-d)$$

که در اینجا $i, j = r, \theta, \varphi$ و $\kappa_{ij}, e_{ij}, c_{ij}$ به ترتیب ضرایب الاستیک، پیزوالکتریک و دی‌الکتریک ذره هستند. مطابق مقالات ارائه شده در مراجع [14] و [24]، در موج برشی یک سیستم کوپل از معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم برای $\bar{W}_n^{(1)}(r), \bar{G}_n^{(1)}(r), \bar{\Phi}_n^{(1)}(r)$ و یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم برای $\bar{\Psi}_n^{(1)}(r)$ به دست می‌آید و در موج طولی یک سیستم کوپل از معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم برای $\bar{W}_n^{(2)}(r), \bar{G}_n^{(2)}(r), \bar{\Phi}_n^{(2)}(r)$ به دست می‌آید که برای $n = 0$ با توجه به اینکه مقدار $\bar{G}_0^{(2)}(r) = 0$ ، این معادله به یک معادله بر اساس ترم‌های $\bar{W}_0^{(2)}(r)$ و $\bar{\Phi}_0^{(2)}(r)$ تبدیل می‌شود. با حل این معادلات مطابق مقالات ارائه شده در مراجع [14] و [24]، توابع $\bar{W}_n^{(1)}(r), \bar{G}_n^{(1)}(r)$ و $\bar{\Phi}_n^{(1)}(r)$ با ضرایب مجهول $H_n^{j(1)}$ تابع $\bar{\Psi}_n^{(1)}(r)$ با ضرایب مجهول $\bar{B}_n^{(1)}$ ، توابع $\bar{W}_n^{(2)}(r), \bar{G}_n^{(2)}(r)$ و $\bar{\Phi}_n^{(2)}(r)$ با ضرایب مجهول $H_n^{j(2)}$ ، $n = 1, 2, 3, \dots$ و $j = 1, 2, 3$

تقسیم کرد. PZT-4 سخت است و مقاومت الکترومکانیکی بالایی دارد. علاوه بر این، دارای مقاومت قطبیتزدایی بالا و تلفات دی‌الکتریک پایین تحت بارهای الکتریکی قوی است. این ویژگی‌های منحصر به فرد آن را برای استفاده به عنوان مبدل‌های صوتی زیر آب، محرک‌ها و ژنراتور برق مناسب می‌سازد. مؤلفه‌های تنش نرمال شده و مؤلفه‌های جابه‌جایی‌های الکتریکی نرمال شده در محیط و ذره به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$DSCF_{ij} = \hat{\sigma}_{ij} = \frac{|\sigma_{ij}|}{\sigma_0},$$

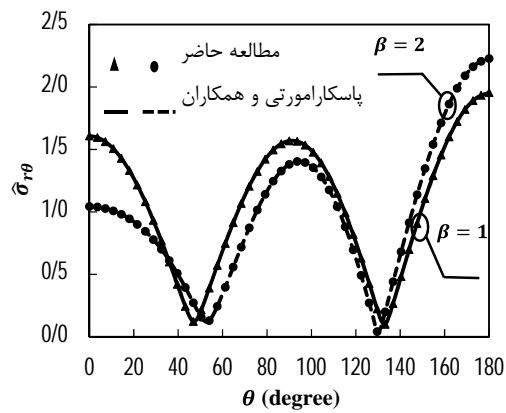
$$DEDCF_i = \hat{D}_i = \frac{|D_i|}{\frac{e_{33}\sigma_0}{c_{44}}},$$

$$i, j = r, \theta, \varphi \quad (14)$$

که در این روابط σ_0 مقدار حداکثر تنش در محیط ناشی از موج ورودی است که برای موج برشی و طولی به ترتیب برابر با $\sigma_0 = K_S \mu |w_0|$ و $\sigma_0 = K_S \mu |u_0|$ است. علامت $DSCF_{ij}$ نشان‌دهنده ضریب تمرکز تنش دینامیکی وابسته به مؤلفه مشخص شده و $DEDCF_i$ نشان‌دهنده مؤلفه i ام ضریب تمرکز جابه‌جایی الکتریکی دینامیکی است. در حالتی که موج تابشی، برشی است، مقادیر حداکثر تنش‌های $DSCF_{rr}$ ، $DSCF_{r\theta}$ و $DSCF_{\theta\theta}$ و جابه‌جایی‌های الکتریکی $DEDCF_r$ و $DEDCF_{\theta}$ در $\varphi = 0^\circ, 180^\circ$ رخ می‌دهد و در حالتی که موج تابشی، طولی است، مقادیر مستقل از φ هستند. با توجه به این واقعیت که سطح مشترک بین ذره و محیط ($r = a$) محل بحرانی برای شروع آسیب‌های الکترومکانیکی است، بنابراین، در این تحقیق نتایج در سطح بین ذره و محیط به دست آورده شده است.

شکل 3 تغییرات مکان (θ_{cr}) حداکثر ضریب تمرکز تنش دینامیکی، $DSCF_{rr}^{max}$ را بر حسب β برای دو موج برشی و طولی نشان می‌دهد. θ_{cr} نشان دهنده مکانی است که در آن مکان حداکثر ضریب تمرکز تنش دینامیکی اتفاق می‌افتد. با کدنویسی در نرم‌افزار *Mathematica*، برای فرکانس‌های مختلف مکانی که در هر فرکانس حداکثر ضریب تمرکز تنش دینامیکی اتفاق می‌افتد به دست آورده شده و نمودار تغییرات مکان برای فرکانس‌های مختلف

که در اینجا بالانویس‌های P و M به ترتیب مشخص کننده ذره و ماتریس هستند. تغییرات تنش نرمال بی‌بعد $\hat{\sigma}_{r\theta} = |\sigma_{r\theta}| / (\mu^M \beta)$ در مرز مشترک ماتریس-ذره کروی (در صفحات $\varphi = 0, \pi$) برای فرکانس‌های بی‌بعد شده $\beta = 1, 2$ با نتایج پاسکارامورتی و همکاران [1] در شکل (2) مقایسه شده است. فرکانس بی‌بعد بصورت $\beta = K_S a$ تعریف می‌شود. همان طور که مشاهده می‌شود نتایج کاملاً بر هم منطبق هستند.



شکل 2. مقایسه مطالعه حاضر با تحقیق پاسکارامورتی و همکاران [1]

سپس در این تحقیق، اثر فرکانس موج ورودی بر مقادیر حداکثر ضرایب تمرکز تنش دینامیکی و مقدار حداکثر ضریب تمرکز جابه‌جایی الکتریکی دینامیکی و همچنین مکان‌های وابسته به آنها مورد بررسی قرار گرفته و به منظور بررسی اثر نوع موج، این مقادیر برای موج برشی و موج طولی مقایسه شده‌اند. خصوصیات ماده اپوکسی به صورت زیر در نظر گرفته شده است [14، 15، 24]:

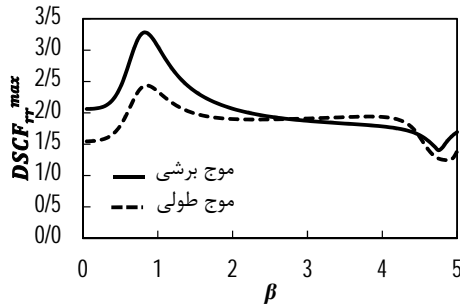
$$\lambda = 4.916 \text{ GPa},$$

$$\mu = 1.731 \text{ GPa},$$

$$k = 0.38 \times 10^{-10} \text{ F/m},$$

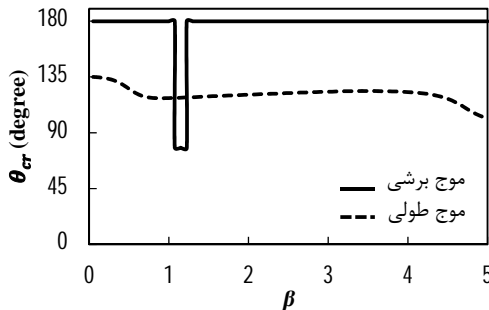
$$\rho = 1202 \text{ kg/m}^3, \quad (13)$$

در این تحقیق ماده پیزوالکتریک از نوع PZT-4 و خواص الکترومکانیکی آن مطابق مقالات ارائه شده در مراجع [14، 24، 31] در نظر گرفته شده است. به طور کلی، PZT را می‌توان به دو گروه پیزوسرامیک سخت و نرم



شکل 4. تغییرات حداکثر ضریب تمرکز تنش دینامیکی، $DSCF_{rr}^{max}$ در مرز مشترک ذره و محیط ($r = a$) بر حسب فرکانس بی بعد β برای موج ورودی برشی و طولی

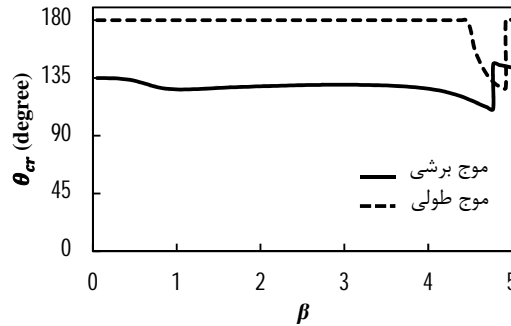
در شکل 5 تغییرات مکان (θ_{cr}) حداکثر ضریب تمرکز تنش دینامیکی، $DSCF_{r\theta}^{max}$ بر حسب β برای دو موج برشی و طولی نشان داده شده است. در موج برشی، برای $\beta < 1.075$ و $\beta > 1.225$ مکان $DSCF_{r\theta}^{max}$ در $\theta_{cr} = 180^\circ$ اتفاق می افتد و مستقل از β است و در فرکانس های $\beta = 1.075$ و $\beta = 1.225$ $DSCF_{r\theta}^{max}$ تابع مکان بحرانی وجود دارد.



شکل 5. تغییرات مکان (θ_{cr}) حداکثر ضریب تمرکز تنش دینامیکی، $DSCF_{r\theta}^{max}$ در مرز مشترک ذره و محیط ($r = a$) بر حسب فرکانس بی بعد β برای موج ورودی برشی و طولی

در شکل 6 تغییرات حداکثر ضریب تمرکز تنش دینامیکی، $DSCF_{r\theta}^{max}$ بر حسب β برای دو موج برشی و طولی نشان داده شده است. برای موج برشی، $Max\{DSCF_{r\theta}^{max}\}_\beta = 4.63$ در $\beta = 1.4$ اتفاق می افتد که 119 درصد بیشتر از حالت استاتیکی مربوطه است. برای $3.6 < \beta \leq 4.55$ مقدار $DSCF_{r\theta}^{max}$ کمتر از مقدار آن در حالت استاتیکی است و در سایر جاها، بیشتر از مقدار آن در حالت استاتیکی است. برای موج طولی، این

ترسیم شده است. برای موج برشی، در فرکانس $\beta = 4.775$ ، ناپیوستگی در تابع مکان بحرانی $DSCF_{rr}^{max}$ وجود دارد. در موج طولی، برای $\beta > 4.45$ و $\beta \leq 4.925$ مکان $DSCF_{rr}^{max}$ در $\theta_{cr} = 180^\circ$ اتفاق می افتد و مستقل از β است و در فرکانس $\beta = 4.925$ ناپیوستگی در تابع مکان بحرانی $DSCF_{rr}^{max}$ وجود دارد.



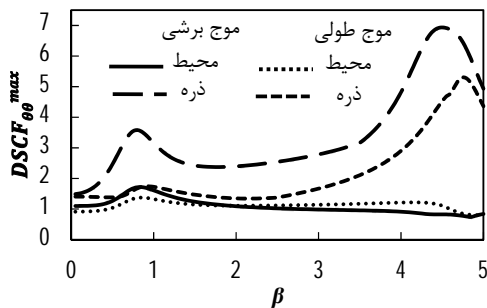
شکل 3. تغییرات مکان (θ_{cr}) حداکثر ضریب تمرکز تنش دینامیکی، $DSCF_{rr}^{max}$ در مرز مشترک ذره و محیط ($r = a$) بر حسب فرکانس بی بعد β برای موج ورودی برشی و طولی

شکل 4 تغییرات حداکثر ضریب تمرکز تنش دینامیکی، $DSCF_{rr}^{max}$ را بر حسب β برای دو موج برشی و طولی نشان می دهد. برای راحتی، بزرگترین مقدار $DSCF_{ij}^{max}$ که در فرکانس β اتفاق می افتد را با $Max\{DSCF_{ij}^{max}\}_\beta$ نشان می دهیم که در اینجا $i, j = r, \theta$ است. برای موج برشی، مشاهده می شود که $Max\{DSCF_{rr}^{max}\}_\beta = 3.28$ در $\beta = 0.85$ اتفاق می افتد که 59 درصد بیشتر از آن در حالت استاتیکی است. در حالت استاتیکی $SCF_{rr}^{max} = 2.06$ است. برای $2 < \beta \leq 5$ بارگذاری دینامیکی اثر کاهشی بر $DSCF_{rr}^{max}$ دارد، در حالی که برای $0 < \beta \leq 2$ این روند معکوس می شود. برای موج طولی، مشاهده می شود که $Max\{DSCF_{rr}^{max}\}_\beta = 2.44$ در $\beta = 0.85$ اتفاق می افتد که 58 درصد بیشتر از آن در حالت استاتیکی است. این شکل نشان می دهد که $SCF_{rr}^{max} = 1.54$ بارگذاری دینامیکی بر $DSCF_{rr}^{max}$ برای $0 < \beta \leq 4.5$ و $4.5 < \beta \leq 5$ به ترتیب اثر افزایشی و کاهشی دارد.

شکل 8 تغییرات حداکثر ضریب تمرکز تنش دینامیکی، $DSCF_{\theta\theta}^{max}$ را بر حسب β در درون محیط و درون ذره برای دو موج برشی و طولی نشان می‌دهد. برای موج برشی، مشاهده می‌شود که درون محیط

$Max\{DSCF_{\theta\theta}^{max}\}_{\beta} = 1.72$ در $\beta = 0.85$ و درون ذره مقدار $Max\{DSCF_{\theta\theta}^{max}\}_{\beta} = 6.93$ در $\beta = 4.5$ اتفاق می‌افتد. این مقادیر به ترتیب، 56 و 365 درصد بیشتر از حالت استاتیکی مربوطه است. بارگذاری دینامیکی برای

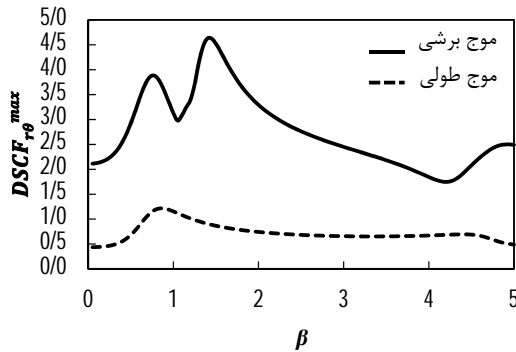
$0 < \beta < 2$ بر $DSCF_{\theta\theta}^{max}$ درون محیط اثر افزایشی دارد، در حالی که برای $0 < \beta \leq 5$ بر $DSCF_{\theta\theta}^{max}$ درون ذره اثر افزایشی دارد. برای موج طولی، مشاهده می‌شود که درون محیط $Max\{DSCF_{\theta\theta}^{max}\}_{\beta} = 1.38$ در $\beta = 0.85$ و درون ذره مقدار $Max\{DSCF_{\theta\theta}^{max}\}_{\beta} = 5.3$ در $\beta = 4.75$ اتفاق می‌افتد. این مقادیر به ترتیب 51 و 277 درصد بیشتر از آن‌ها در نمونه استاتیکی مربوطه است. بارگذاری دینامیکی برای $0 < \beta \leq 4.65$ بر $DSCF_{\theta\theta}^{max}$ درون محیط اثر افزایشی دارد، در حالی که برای $0.6 \leq \beta \leq 1.65$ و $2.6 \leq \beta \leq 5$ بر $DSCF_{\theta\theta}^{max}$ درون ذره اثر افزایشی دارد.



شکل 8. تغییرات حداکثر ضریب تمرکز تنش دینامیکی، $DSCF_{\theta\theta}^{max}$ در مرز مشترک ذره و محیط ($r = a$) بر حسب فرکانس بی‌بعد β برای موج ورودی برشی و طولی

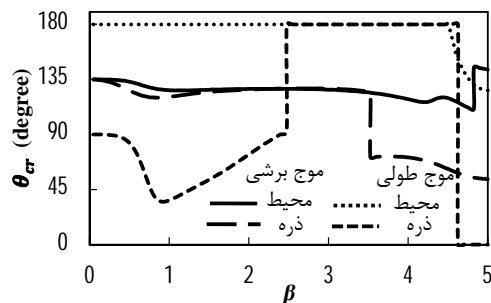
در شکل 9 تغییرات مکان (θ_{cr}) وقوع حداکثر جابه جایی الکتریکی دینامیکی، $DEDSCF_{\theta}^{max}$ بر حسب β برای دو موج برشی و طولی نشان داده شده است. در موج برشی، برای $0 < \beta < 1.225$ و $4.225 < \beta < 5$

شکل نشان می‌دهد که $Max\{DSCF_{r\theta}^{max}\}_{\beta} = 1.22$ در $\beta = 0.85$ اتفاق می‌افتد که 179 درصد بیشتر از حالت استاتیکی مربوطه است. برای موج طولی، بارگذاری دینامیکی بر $DSCF_{r\theta}^{max}$ همواره اثر افزایشی دارد.

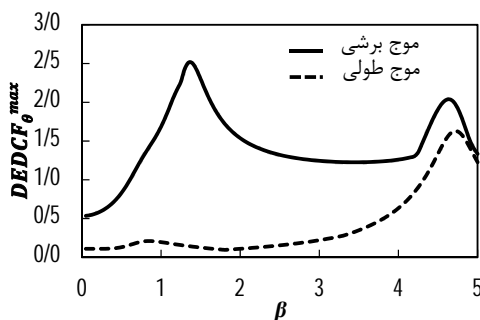


شکل 6. تغییرات حداکثر ضریب تمرکز تنش دینامیکی، $DSCF_{r\theta}^{max}$ در مرز مشترک ذره و محیط ($r = a$) بر حسب فرکانس بی‌بعد β برای موج ورودی برشی و طولی

شکل 7 تغییرات مکان (θ_{cr}) حداکثر ضریب تمرکز تنش دینامیکی $DSCF_{\theta\theta}^{max}$ را بر حسب β در درون محیط و درون ذره، برای دو موج برشی و طولی نشان می‌دهد. در موج برشی، در فرکانس $\beta = 3.525$ و $\beta = 4.825$ ناپیوستگی در تابع مکان‌های بحرانی $DSCF_{\theta\theta}^{max}$ به ترتیب درون محیط و ذره وجود دارد. در موج طولی، درون محیط و ذره به ترتیب برای $2.475 < \beta < 4.5$ و $\beta \leq 4.625$ مکان $DSCF_{\theta\theta}^{max}$ در $\theta_{cr} = 180^\circ$ اتفاق می‌افتد و مستقل از β است. در فرکانس‌های $\beta = 2.475$ و $\beta = 4.625$ ناپیوستگی در تابع مکان‌های بحرانی $DSCF_{\theta\theta}^{max}$ درون ذره وجود دارد.



شکل 7. تغییرات مکان (θ_{cr}) حداکثر ضریب تمرکز تنش دینامیکی، $DSCF_{\theta\theta}^{max}$ در مرز مشترک ذره و محیط ($r = a$) بر حسب فرکانس بی‌بعد β برای موج ورودی برشی و طولی



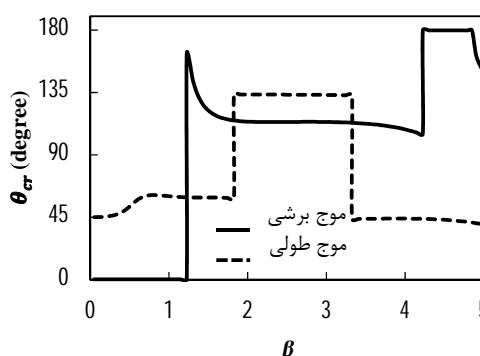
شکل 10. تغییرات حداکثر ضریب تمرکز جابه جایی الکتریکی دینامیکی، $DED CF_{\theta}^{max}$ در مرز مشترک ذره و محیط ($r = a$) بر حسب فرکانس بی بعد β برای موج ورودی برشی و طولی

بحث و نتیجه گیری

در این تحقیق با استفاده از بسط تابع ویژه و سری فروبنیوس توسعه یافته، پراکنندگی امواج صفحه‌ای توسط یک ذره کروی پیزوالکتریک دارای همسانگرد کروی تعبیه شده در محیط پلیمری الاستیک همسانگرد نامحدود مورد بررسی قرار گرفته است. اتصال بین ذره و محیط کامل در نظر گرفته شده است. ضرایب تمرکز تنش دینامیکی و ضریب تمرکز جابه‌جایی الکتریکی دینامیکی در سطح مشترک ذره پیزوالکتریک و محیط محاسبه و اثر فرکانس موج ورودی بر مقادیر حداکثر این ضرایب و همچنین مکان‌های وابسته به آنها برای فرکانس‌های بی بعد کمتر از 5 مورد بررسی قرار گرفته است. به منظور بررسی اثر نوع موج، این مقادیر برای موج برشی و موج طولی مقایسه شده‌اند. برای به دست آوردن نتایج، ذره پیزوالکتریک از نوع 4 - PZT و محیط اپوکسی در نظر گرفته شده است.

نتایج نشان می‌دهد که مکان وقوع حداکثر ضریب تمرکز تنش دینامیکی ناشی از تنش شعاعی مربوط به موج طولی، در فرکانس‌های بی بعد کوچک‌تر مساوی با $4/45$ و بزرگ‌تر از $4/925$ در 180 درجه اتفاق می‌افتد و مستقل از فرکانس بی بعد است. حداکثر ضریب تمرکز تنش دینامیکی ناشی از تنش برشی مربوط به موج برشی، برای فرکانس‌های بی بعد کوچک‌تر از $1/075$ و بزرگ‌تر از $1/225$ در مکان 180 درجه اتفاق می‌افتد و مستقل از فرکانس بی بعد است. مکان وقوع حداکثر ضریب تمرکز تنش دینامیکی در جهت θ مربوط به موج طولی، درون محیط برای فرکانس‌های بی بعد کوچک‌تر مساوی با $4/5$ و درون ذره برای فرکانس‌های بی بعد بزرگ‌تر از $2/475$ و کوچک‌تر از $4/625$ در 180 درجه اتفاق می‌افتد و

مکان 4.85 وقوع حداکثر ضریب تمرکز جابه جایی الکتریکی دینامیکی $DED CF_{\theta}^{max}$ به ترتیب در $\theta_{cr} = 0^{\circ}$ و 180° هستند، یعنی برای این محدوده‌های β مکان‌های بحرانی مستقل از فرکانس بی بعد هستند. ناپیوستگی شدیدی در مکان‌های بحرانی $DED CF_{\theta}^{max}$ برای $\beta = 1.225$ و $\beta = 4.225$ وجود دارد. همین پدیده برای موج طولی، در فرکانس‌های بی بعد $\beta = 1.825$ و $\beta = 3.325$ رخ می‌دهد.



شکل 9. تغییرات مکان (θ_{cr}) حداکثر ضریب تمرکز جابه‌جایی الکتریکی دینامیکی، $DED CF_{\theta}^{max}$ در مرز مشترک ذره و محیط ($r = a$) بر حسب فرکانس بی بعد β برای موج ورودی برشی و طولی

در شکل 10 تغییرات حداکثر ضریب تمرکز جابه‌جایی الکتریکی دینامیکی، $DED CF_{\theta}^{max}$ بر حسب β برای دو موج برشی و طولی نشان داده شده است. برای موج برشی، $Max\{DED CF_{\theta}^{max}\}_{\beta} = 2.51$ در $\beta = 1.35$ اتفاق می‌افتد که 371 درصد بیشتر از مقدار آن در حالت استاتیکی است. بارگذاری دینامیکی بر $DED CF_{\theta}^{max}$ همواره اثر افزایشی دارد. برای موج طولی، این شکل نشان می‌دهد که $Max\{DED CF_{\theta}^{max}\}_{\beta} = 1.63$ در $\beta = 1.63$ اتفاق می‌افتد که 1377 درصد بیشتر آن در حالت استاتیکی است. برای $0.1 \leq \beta \leq 0.25$ و $1.7 \leq \beta \leq 2$ مقدار $DED CF_{\theta}^{max}$ کمتر از مقدار آن حالت استاتیکی است و در سایر نواحی، بیشتر از مقدار آن حالت استاتیکی است.

حداکثر ضریب تمرکز تنش دینامیکی ناشی از تنش برشی مربوط به موج برشی بزرگتر از موج طولی است و در فرکانس بی‌بعد $1/4$ اتفاق می‌افتد. حداکثر ضریب تمرکز تنش دینامیکی در جهت θ هم درون محیط و هم درون ذره مربوط به موج برشی بزرگتر از موج طولی است و به ترتیب در فرکانس‌های بی‌بعد $0/85$ و $4/5$ اتفاق می‌افتد. حداکثر ضریب تمرکز جابه‌جایی الکتریکی دینامیکی در جهت θ مربوط به موج برشی بزرگتر از موج طولی است و در فرکانس بی‌بعد $1/35$ اتفاق می‌افتد.

مستقل از فرکانس بی‌بعد است. حداکثر ضریب تمرکز جابه‌جایی الکتریکی دینامیکی در جهت θ مربوط به موج برشی، برای فرکانس‌های بی‌بعد کوچکتر از $1/225$ و فرکانس‌های بی‌بعد بزرگتر از $4/225$ و کوچکتر از $4/85$ به ترتیب در مکان‌های صفر و 180 درجه هستند، یعنی برای این محدوده‌های فرکانس بی‌بعد، مکان‌های بحرانی مستقل از فرکانس بی‌بعد هستند.

مقایسه نتایج مربوط به موج برشی و موج طولی، نشان می‌دهد که حداکثر ضریب تمرکز تنش دینامیکی ناشی از تنش شعاعی مربوط به موج برشی بزرگتر از موج طولی است و در فرکانس بی‌بعد $0/85$ اتفاق می‌افتد. همچنین

interphase. Composite Interfaces. 2015; 22(2): 95-125.

منابع

- [1] Paskaramoorthy R, Kienhöfer F, Chandler HD. The response of particle-reinforced composites to asymmetric dynamic loads. *Composites Science and Technology*. 2002;62(2):223-32.
- [2]. Fang X-Q, Hu C, Huang W-H. Scattering of elastic waves and dynamic stress in two-particle reinforced composite system. *Mechanics of Materials*. 2007;39(6):538-47.
- [3]. Bugarin S, Paskaramoorthy R, Reid RG. Influence of the geometry and material properties on the dynamic stress field in the matrix containing a spheroidal particle reinforcement. *Composites Part B: Engineering*. 2012; 43(2):272-9.
- [4]. Ru Y, Wang GF, Su LC, Wang TJ. Scattering of vertical shear waves by a cluster of nanosized cylindrical holes with surface effect. *Acta Mechanica*. 2013; 224(5):935-44.
- [5]. Liu X, Wei P, Wang L, Zhang G. Single and Multiple Scattering of Inplane Waves by Nanofibers with Consideration of Interface Effects. *Mechanics of Composite Materials*. 2014;50(3):317-28.
- [6]. Yan R. Surface Effect on Diffractions of Elastic Waves and Stress Concentration near a Cluster of Cylindrical Nanoholes Arranged as Quadrate Shape. *Advances in Materials Science and Engineering*. 2015; 2015: 134975.
- [7]. Ghanei Mohammadi AR, Hosseini Tehrani P. Effect of surface elasticity on scattering of elastic P-waves from a nanofiber including an inhomogeneous
- [8]. Ghanei Mohammadi AR, Hosseini Tehrani P. Dynamic Stress Concentrations Due to Scattering of Elastic SV Waves from a Coated Nanoinclusion with Considerations in the Interfacial Region. *Journal of Mechanics*. 2017;33(3):279-88.
- [9]. Kanaun S, Levin V, Markov M. Scattering problem for a spherical inclusion in poroelastic media: Application of the asymptotic expansion method. *International Journal of Engineering Science*. 2018;128:187-207.
- [10]. Jafarzadeh A, Folkow PD, Boström A. Scattering of elastic waves by a transversely isotropic sphere and ultrasonic attenuation in hexagonal polycrystalline materials. *Wave Motion*. 2022:102963.
- [11]. Ma H, Wang B. The scattering of electroelastic waves by an ellipsoidal inclusion in piezoelectric medium. *International Journal of Solids and Structures*. 2005;42(16):4541-54.
- [12]. Qian Z, Jin F, Wang Z, Kishimoto K. Investigation of scattering of elastic waves by cylinders in 1-3 piezocomposites. *Ultrasonics*. 2005; 43(10): 822-31.
- [13]. Qian Z, Jin F, Kishimoto K, Lu T. Scattering of elastic P-waves by a transversely isotropic piezoelectric cylinder embedded in a polymer matrix. *Smart materials and structures*. 2008;17(4): 045019.
- [14]. Kamali MT, Shodja HM. The scattering of electro-elastic waves by a spherical piezoelectric particle in a polymer matrix.

- International Journal of Engineering Science. 2006;44(10):633-49.
- [15]. Kamali MT, Shodja HM. The scattering of P-waves by a piezoelectric particle with FGPM interfacial layers in a polymer matrix. International Journal of Solids and Structures. 2010; 47(18): 2390-7.
- [16]. Fang X-Q, Liu J-X, Wang X-H, Zhang T, Zhang S. Dynamic stress from a cylindrical inclusion buried in a functionally graded piezoelectric material layer under electro-elastic waves. Composites Science and Technology. 2009;69(7):1115-23.
- [17]. Shodja HM, Jarfi H, Rashidinejad E. The electro-elastic scattered fields of an SH-wave by an eccentric two-phase circular piezoelectric sensor in an unbounded piezoelectric medium. Mechanics of Materials. 2014;75:1-12.
- [18]. Shi Y, Wan Y. Anti-plane time-harmonic Green's functions for a circular inhomogeneity in piezoelectric medium with a spring-or membrane-type interface. Mechanics Research Communications. 2015;70:24-41.
- [19]. Fang X-Q, Liu H-W, Feng W-J, Liu J-X. Size-dependent effects on electromechanical response of multilayer piezoelectric nano-cylinder under electro-elastic waves. Composite Structures. 2015;125:23-8.
- [20]. Kuo H-Y, Huang Y-A, Sun C-H. Scattering of anti-plane shear waves by arbitrarily distributed circular cylinders in a functionally graded multiferroic fibrous composite. Acta Mechanica. 2018;229(4):1483-501.
- [21]. Ghafarollahi A, Shodja H. Scattering of transverse surface waves by a piezoelectric fiber in a piezoelectric half-space with exponentially varying electromechanical properties. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. 2019;70(2):1-19.
- [22]. Jam MT, Shodja HM. Interface effects on the electromagnetic radiation emanating from an embedded piezoelectric nano-fiber incident upon by SH-waves. Wave Motion. 2020;94: 102513.
- [23]. Qi H, Chu F, Liu G, Guo J. Dynamic analysis of piezoelectric materials with an elliptical hole under the action of shear horizontal waves. Mechanics of Materials. 2022;169: 104323.
- [24]. Gholami M, Kamali M, Shodja H, Shokrolahi-Zadeh B. A buried piezoelectric spherical particle incident upon by plane shear waves. Applied Mathematical Modelling. 2023;113:71-87.
- [25]. Eringen A, Suhubi E. Elastodynamics. Volume 2- Linear theory(Book). New York, Academic Press, Inc, 1975 671 p. 1975.
- [26]. Pao Y-H, Mow C-C. Diffraction of elastic waves and dynamic stress concentrations: Russak; 1971.
- [27]. Wang G. Diffraction of shear waves by a nanosized spherical cavity. Journal of Applied Physics. 2008; 103(5): 053519.
- [28]. Wang G, Feng X, Yu S. Interface effects on the diffraction of plane compressional waves by a nanosized spherical inclusion. Journal of Applied Physics. 2007;102(4):043533.
- [29]. Chen W-Q. Problems of radially polarized piezoelectric bodies. International Journal of Solids and Structures. 1999;36(28):4317-32.
- [30]. Chen W, Ding H, Xu R. Three-dimensional static analysis of multilayered piezoelectric hollow spheres via the state space method. International Journal of Solids and Structures. 2001;38(28-29):4921-36.
- [31]. Berlincourt DA, Curran DR, Jaffe H. Piezoelectric and piezomagnetic materials and their function in transducers. Physical Acoustics: Principles and Methods. 1964;1(Part A):202-4.

COPYRIGHTS



© 2022 by the authors Licensee PNU, Tehran, Iran This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution 4 0 International (CC BY 4 0) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>)