

برآورد کوانتومی فاز کد شده در کیوبیت‌های طراحی شده توسط نقص شبکه‌ای الماس

حسین رنگانی جهرمی^{1*}، سمیرا نظیف کار²

1. استادیار، گروه فیزیک، دانشگاه جهرم، جهرم، ایران

2. استادیار، گروه فیزیک، دانشگاه نیشابور، نیشابور، ایران

تاریخ دریافت: 1400/08/11 تاریخ پذیرش: 1400/10/26

Quantum Estimation of Phase Encoded into Qubits Designed by a Lattice Defect in Diamond

H. Rangani Jahromi^{*1}, S. Nazifkar²

1. Assistant Professor, Department of Physics, Jahrom University, Jahrom, Iran

2. Assistant Professor, Department of Physics, University of Neyshabur, Neyshabur, Iran

Received: 2021/11/02 Accepted: 2022/01/16

Abstract

Nitrogen-vacancy center, consisting of a nearest-neighbor pair of a nitrogen atom, which substitutes for a carbon atom, and a lattice vacancy, is a point defect in diamond. This system is one of the most important candidates for implementing quantum information processing. In this paper, the application of such a system in the process of quantum estimation is investigated. In particular, the estimation of the initial phase, which can encode significant information, is examined precisely. In addition, we study the effect of the entanglement between the system and its environment as well as the fidelity of the evolved state to the initial one, on the accuracy of the phase estimation

Keywords

Quantum Fisher Information, Quantum Estimation Theory, Fidelity, Entropy, Nitrogen Vacancy Center

چکیده

مرکز نیتروژن - جای خالی یک نقص نقطه‌ای در الماس است که از یک جفت همسایه از اتم نیتروژن (که جایگزین یکی از اتم‌های کربن شده است) و یک جای خالی شبکه تشکیل شده است. این سامانه یکی از کاندیداهای اصلی جهت تحقق عملی پردازش‌های کوانتومی است. در این مقاله کاربرد چنین سامانه‌ای در فرآیند برآورد کوانتومی مورد بررسی قرار خواهد گرفت. مخصوصاً برآورد فاز اولیه که می‌تواند اطلاعات مهمی را در خود کد کرده باشد، دقیقاً بررسی خواهد شد. علاوه بر این، تأثیر درهم‌تنیدگی سامانه با محیط و همچنین وفاداری حالت تحول یافته را نسبت به حالت اولیه بر دقت برآورد فاز مطالعه خواهیم کرد.

واژه‌های کلیدی

اطلاعات فیشر کوانتومی، نظریه برآورد کوانتومی، وفاداری، آنتروپی، مرکز نیتروژن - جای خالی

مقدمه

تجربی بر این پایه محقق شده‌اند. علاوه بر این، توسط یک سامانه درهم‌تنیده شامل م.ن.ج [20] نابرابری بل، دوربری کوانتومی و همبستگی‌های کوانتومی بین م.ن.ج‌های دور از یکدیگر آزمایش شده است [21-23].

سنجش کوانتومی [24-31] یکی از پیشرفته‌ترین و پرکاربردترین زمینه‌ها در حوزه فناوری‌های کوانتومی است که با سرعت زیادی در حال توسعه است. هدف پژوهش‌ها در زمینه سنجش کوانتومی ساخت حسگرهایی است که عملکرد آنها با استفاد از همبستگی‌های کوانتومی یا دیگر منابع نهفته در حالت کوانتومی سامانه بهبود داده شوند به طوری که کارایی آنها فراتر از استراتژی کلاسیکی باشد. این تکنیک در طراحی رادار کوانتومی، مشاهدات نجومی، تشخیص امواج گرانشی، ساخت ساعت‌های اتمی، کاوشگرهای زیستی، بازخوانی داده‌ها، طراحی میکروسکوپ و... اهمیت خود را نشان می‌دهد [32].

م.ن.ج دارای ویژگی‌های لازم برای استفاده عملی به عنوان یک حسگر کوانتومی است [33]. آماده‌سازی اولیه به همراه بازخوانی مؤثر حالت اسپینی و حساسیت به پارامترهای فیزیکی مختلف منجر به مطالعه انواع کاربردهای سنجشی مبتنی بر نقص شبکه‌ای م.ن.ج در الماس از جمله در سنجش میدان‌های الکتریکی یا مغناطیسی، دماسنجی و برآورد فشار شده است [34-36]. از آنجایی که الماس‌ها از نظر فراهم‌سازی شرایط جهت بهره‌برداری، نگهداری و ایجاد تغییرات در مقایسه با سایر سیستم‌های کوانتومی (اتمی) از سادگی قابل توجهی برخوردار هستند، کاربرد عملی آنها بسیار مورد توجه قرار گرفته است (برای مرور رجوع شود به [34]).

تا جایی که بررسی‌های ما نشان می‌دهد برآورد فازی که از ابتدا در حالت کوانتومی م.ن.ج کد شده، تا کنون مورد مطالعه قرار نگرفته است. این فاز اولیه می‌تواند حامل اطلاعات رمزنگاری شده باشد یا اینکه ماهیت فرایندی که حالت اولیه را آماده‌سازی نموده، آشکار سازد و لذا تخمین هرچه دقیق‌تر آن از اهمیت خاصی برخوردار است. در این مقاله این موضوع مورد مطالعه قرار می‌گیرد. به ویژه ارتباط برآورد فاز اولیه در کیوبیت‌های درهم‌تنیده م.ن.ج با آنتروپی و وفاداری که از معیارهای مهم در نظریه اطلاعات کوانتومی هستند، بررسی خواهد شد.

حوزه تحقیقاتی الکترودینامیک کوانتومی حفره¹ [1] برای بررسی و کنترل برهم‌کنش نور-ماده، به ویژه جفت شدن گسیلنده دو ترازوی، مانند نقاط کوانتومی یا کیوبیت‌های ابررسانا [2]، با هر تک حالت بوزونی کوانتیده نظیر حفره‌های ابررسانا [3]، نانولوله‌های کربنی [4]، تشدیدکننده‌های نانومکانیکی [4]، امواج اسپینی (تجمعی) [5] در کریستال‌های مولکولی یا حفره‌های فوتونی [6] پدید آمده است. از سوی دیگر، الکترودینامیک کوانتومی کاواک [7] یکی دیگر از زمینه‌های تحقیقاتی جالب توجه است که بر روش‌های جدید برای مطالعه و کنترل برهم‌کنش نور با ماده در حضور مدهای پلاسمونی که نور را از طریق پلاسمون‌های سطحی جایگزیده تحت تأثیر قرار می‌دهند، متمرکز می‌شود. تکنیک‌های ساخت پیشرفته، نانوساختار پلاسمونی را به عنوان یک کاندیدای مهم برای تحقق عملی آزمایش‌های اپتیک کوانتومی، پردازش اطلاعات کوانتومی و کنترل کوانتومی، به‌عنوان مثال در طیف‌سنجی اتمی [8]، ترانزیستورهای تک فوتونی [9]، ابرتابش [10] و انتشار تک پلاسمون [11] معرفی می‌کند.

گسیلنده‌هایی که در این جا در نظر می‌گیریم، یک مرکز نیتروژن-جای خالی² (م.ن.ج) در الماس است. م.ن.ج یک نقص شبکه‌ای شامل یک اتم نیتروژن جایگزین شده است که با یک جای خالی در شبکه کریستالی الماس مرتبط است. تحت شرایط مناسب، یک م.ن.ج می‌تواند یک سیستم دو ترازوی یا کیوبیت مؤثر را تشکیل دهد. در واقع، یک م.ن.ج منفرد می‌تواند به عنوان واحد اساسی یک کامپیوتر کوانتومی در نظر گرفته شود که در آن اسپین الکترونی مرکزی به عنوان کاوشگر و اسپین هسته‌ای که دارای زمان هم‌دوسی طولانی است، به عنوان حافظه عمل می‌کند. این سامانه جالب حالت جامد یکی از مهم‌ترین کاندیداها جهت تحقق عملی پردازش کوانتومی است به طوری که بسیاری از فرآیندهای کنترل کوانتومی با این سیستم انجام شده است [12-15]. به طور دقیق‌تر، عملیات لازم برای محاسبات کوانتومی، از جمله مقداردهی اولیه [16]، پردازش [17]، ذخیره‌سازی [18] و بازخوانی [19] همگی به صورت

1. Cavity Quantum Electrodynamics (Cavity QED)
2. Nitrogen Vacancy Centre (NVC)

مفاهیم پایه

الف) اطلاعات فیشر کوانتومی¹

وقتی حالت‌های ρ_θ و $\rho_{\theta+d\theta}$ با یک تغییر بی‌نهایت کوچک $d\theta$ از یکدیگر متفاوت هستند، این احتمال وجود دارد که بتوان پارامتر θ را با دقت بالایی تخمین زد. معیار اصلی برای کمی‌سازی میزان تمیزپذیری این دو حالت، اطلاعات فیشر² است [37]. فرض یک اندازه‌گیری که توسط سنجه عملگری مقدار مثبت³ $\{\Lambda_x\}$ توصیف می‌شود روی یک توزیعی از سامانه‌ها که به وسیله پارامتر کلاسیکی θ تحت تأثیر قرار گرفته‌اند، انجام شده است. سوال این است که با چه دقتی می‌توانیم یک مقدار تخمینی از پارامتر θ را به دست آوریم؟

پاسخ توسط نابرابری کلاسیکی کرامر-راو⁴ داده می‌شود که بر اساس آن کوچک‌ترین تغییر قابل تشخیص پارامتر θ در اندازه‌گیری $\{\Lambda_x\}$ توسط نامساوی $\delta\theta \geq \frac{1}{f(\theta)}$ توصیف می‌گردد [38] که در آن $f(\theta) \equiv \int dx \frac{1}{p(x|\theta)} \left(\frac{\partial p(x|\theta)}{\partial \theta} \right)^2$ معیاری است که نشان می‌دهد چه مقدار اطلاعات در مورد پارامتر θ قابل دستیابی است و در نتیجه برآورد آن تا چه اندازه دقیق است. در تعریف اطلاعات فیشر $p(x|\theta)$ توزیع احتمال مربوط به $\{\Lambda_x\}$ است که در آن کمیت x نتایج اندازه‌گیری را نشان می‌دهد. با بهینه‌سازی بر روی تمام سنجه‌های عملگری مقدار مثبت $\{\Lambda_x\}$ می‌توان اطلاعات فیشر کوانتومی را تعریف کرد:

$$F_Q(\theta) = \max_{\Lambda_x} f(\theta), \quad (1)$$

که منجر به یافتن نابرابری کوانتومی کرامر-راو

$$\Delta\theta \geq \frac{1}{F_Q(\theta)}, \quad (2)$$

می‌شود که کوچک‌ترین تغییر قابل تشخیص پارامتر را در اختیار ما قرار می‌دهد. بر اساس نظریه برآورد کوانتومی، افزایش اطلاعات فیشر کوانتومی به معنای افزایش دقت بهینه تخمین است.

یکی از روش‌های محاسبه اطلاعات فیشر کوانتومی مبتنی بر محاسبه مشتق لگاریتمی متقارن⁵ L_θ است که به صورت ذیل تعریف می‌شود:

$$\frac{\partial \rho_\theta}{\partial \theta} = \frac{1}{2} [L_\theta \rho_\theta + \rho_\theta L_\theta], \quad (3)$$

حال با این تعریف می‌توان اطلاعات فیشر کوانتومی را بازنویسی نمود [37, 39-41]:

$$F_Q(\theta) = \text{Tr}(\rho_\theta L_\theta^2). \quad (4)$$

ب) آنتروپی فون نیومان⁶

با توجه به اهمیت بررسی همبستگی یک سیستم کوانتومی با محیط خود در ساخت یک کامپیوتر کوانتومی مقیاس پذیر، در این بخش معیاری برای بررسی چنین همبستگی معرفی می‌شود.

آنتروپی فون نیومان معیار اصلی درهم‌تنیدگی بین اجزای یک سامانه دو بخشی [42] است، البته مشروط به اینکه سامانه کل در یک حالت خالص باشد [43]. به طور دقیق‌تر، بنت⁷ و همکارانش در [44] نشان دادند که برای هر سامانه دو بخشی در حالت خالص، آنتروپی فون نیومان محاسبه شده برای ماتریس چگالی کاهش یافته هر یک از اجزای آن، می‌تواند به عنوان معیار درهم‌تنیدگی استفاده شود. همین بحث را می‌توان به وضعیتی که در آن یک سامانه با محیط خود اندرکنش می‌کند، تعمیم داد. در واقع، بنا به اصل خالص‌سازی⁸ [45] می‌توان حالت سامانه+محیط را یک حالت خالص در نظر گرفت که آنتروپی، به عنوان معیار درهم‌تنیدگی، می‌تواند برای ماتریس چگالی کاهش یافته سامانه محاسبه شود. به عبارت دیگر اگر $|\psi\rangle$ حالت سامانه+محیط باشد، درهم‌تنیدگی بین سامانه و محیط را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$E(\psi) = S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \text{Log}_2(\rho)) \\ = -\sum_i \omega_i \text{Log}_2(\omega_i), \quad (5)$$

که در آن ρ ماتریس چگالی سامانه و ω_i ها ویژه مقادیر آن هستند.

5. Symmetric Logarithmic Derivative (SLD)

6. Von Neumann Entropy

7. Bennett

8. Purification

1. Quantum Fisher Information (QFI)

2. Fisher Information

3. Positive Operator Valued Measurement (POVM)

4. Classical Cramér-Rao Inequality

$$H = \sum_{j=1,2} (\omega_0 + g_{jj}) \sigma_j^+ \sigma_j^- + (\sigma_1^+ \sigma_2^- + \sigma_1^- \sigma_2^+), \quad (9)$$

در این رابطه $\sigma_i^- = (\sigma_i^+)^{\dagger}$ و $\sigma_i^+ = |e\rangle\langle g|$ ترتیب عملگرهای افزایش دهنده و کاهش دهنده کیوبیت i است. Γ_{jj} و g_{jj} به ترتیب نرخ گسیل خود به خودی و شیفت فرکانس هر م.ن.ج. می‌باشند. علاوه بر این، g_{12} و $\Gamma_{12} = \Gamma_{21}$ به ترتیب قدرت جفت شدگی مؤثر دو کیوبیت و نرخ گسیل خود به خودی هم بسته را نشان می‌دهند. با اطلاع از مقدار گشتاورهای دوقطبی و تانسور گرین کلاسیکی در حضور موجبر می‌توان g_{ij} و Γ_{ij} محاسبه نمود. با فرض اینکه کیوبیت‌ها در موقعیت‌های متقارن در امتداد موجبر قرار گرفته‌اند، می‌توان قرار داد $\Gamma \equiv \Gamma_{ii}$. از طرفی فرض می‌شود فاصله کیوبیت‌ها تا موجبر بیشتر از 10 نانومتر است که در چنین شرایطی g_{jj} در فرکانس‌های مورد مطالعه بسیار کوچک بوده و لذا در این مقاله از آن چشم‌پوشی می‌شود.

هنگامی که در موجبر ضریب β ، که نشان دهنده کسری از تشعشع‌های گسیل شده است که توسط مد انتشاری گرفتار می‌شوند، قابل توجه باشد می‌توان قدرت جفت شدگی مؤثر g_{12} و نرخ واهلس Γ_{12} را به این صورت بیان کرد:

$$g_{12} = \frac{\Gamma}{2} \beta \sin(k_{pl}d) e^{-d/(2l)} \quad \text{و} \quad (10)$$

$$\Gamma_{12} = \Gamma \beta \cos(k_{pl}d) e^{-\frac{d}{2l}},$$

در این روابط d ، فاصله دو کیوبیت از یکدیگر است. همچنین در این روابط، l و $k_{pl} = \frac{2\pi}{\lambda_{pl}}$ به ترتیب طول انتشار و عدد موج پلاسمون را نشان می‌دهند.

اگر حالت اولیه دو کیوبیت در یک حالت شبه-بل⁴ به فرم ذیل

$$|\Phi\rangle = \sqrt{\alpha}|10\rangle + e^{i\theta}\sqrt{1-\alpha}|01\rangle, \quad (11)$$

آماده‌سازی شده باشند که θ فاز اولیه نامیده می‌شود. با حل معادله (8)، مؤلفه‌های غیر صفر ماتریس چگالی عبارت خواهند بود از [48]:

$$\rho_{00,00} = 1 - e^{-\Gamma t} (\cosh(\Gamma_{12}t) - 2\xi \cos(\theta) \sinh(\Gamma_{12}t)), \quad (12)$$

$$\rho_{01,01} = \frac{1}{2} e^{-\Gamma t} (2\alpha -$$

ج) وفاداری¹

مفهوم وفاداری یک مفهوم اساسی در نظریه اطلاعات است. فرض سامانه وارد یک کانال کوانتومی می‌شود که ممکن است در معرض نویز (نوفه) تصادفی باشد. نتیجه این خواهد بود که حالت‌های ورودی و خروجی کانال لزوماً کاملاً مشابه نخواهند بود.

برای هر طرح ارتباطاتی معین، وفاداری یک معیار کمی برای دقت انتقال اطلاعات و میزان مشابهت حالات ورودی و خروجی است.

وفاداری بین حالات کوانتومی ρ و σ به صورت تعریف شده است [46]:

$$F(\rho, \sigma) = \left(\text{Tr} \left(\sqrt{\rho^{\frac{1}{2}} \sigma \rho^{\frac{1}{2}}} \right) \right)^2. \quad (6)$$

تغییرات وفاداری بین صفر و یک محدود است ($0 \leq F(\rho, \sigma) \leq 1$) که $F(\rho, \sigma) \leq 1$ فقط اگر $\sigma = \rho$.

در حالت خاص وفاداری بین حالت خالص $|\psi\rangle$ و حالت دلخواه ρ به معادله ساده‌تر ذیل کاهش می‌یابد:

$$F(\rho, \sigma) = \text{Tr} \left(\sqrt{\langle \psi | \rho | \psi \rangle | \psi \rangle \langle \psi |} \right) = \sqrt{\langle \psi | \rho | \psi \rangle}. \quad (7)$$

مدل

در مدلی که ما در نظر می‌گیریم دو م.ن.ج. مجزا (م.ن.ج. 1 و م.ن.ج. 2) با مدهای یک موجبر پلاسمونیک² یک بعدی جفت شده‌اند. هر م.ن.ج. که با دو الکترون جفت نشده، واقع در مجاورت جای خالی، باردار شده است، را می‌توان به عنوان یک کیوبیت با فرکانس گذار ω_0 مدل‌سازی نمود.

با رد جزئی گرفتن از درجات آزادی موجبر و استفاده از تقریب بورن-مارکوفی³ می‌توانیم معادله اصلی حاکم بر تحول زمانی دو م.ن.ج. را به صورت ذیل نوشت [47]:

$$\dot{\rho}(t) = -i[H, \rho(t)] + \sum_{i,j=1,2} \frac{\Gamma_{ij}}{2} [2\sigma_i^- \rho(t) \sigma_j^+ - \sigma_j^+ \sigma_i^- \rho(t) - \rho(t) \sigma_j^+ \sigma_i^-], \quad (8)$$

که هامیلتونی برابر است با:

1. Fidelity
2. Plasmonic Waveguide
3. Born-Markovian Approximation

4. Bell-Like

$$L_i = \frac{1}{\mu_i} [\partial_x \rho_i + \xi_i \rho_i^{-1} - \partial_x \mu_i], \quad (13)$$

$$\mu_i = \xi_i = 2\mu_i \partial_x \mu_i - \partial_x P_i / 4 \quad \text{که در آن} \quad \text{Tr}\left(\frac{\rho_i}{2}\right)$$

$\det(\rho_i) = 0$ اگر $P_i = \text{Tr}(\rho_i^2 \xi_i)$ هستند. می‌توان نشان داد که $\xi_i = 0$ خواهند بود.

با ساختن عملگر مشتق لگاریتمی متقارن L و قرار دادن آن در معادله (4) و حالت تکامل یافته (12)، عبارت زیر را برای اطلاعات فیشر کوانتومی می‌آوریم:

$$F_Q(\theta) = -\frac{A_1(\theta)}{A_3(\theta)A_4(\theta)} - \frac{A_2(\theta)}{A_3(\theta)A_4(\theta)} \quad (14)$$

که به علت طولانی بودن رابطه جملات را در زیر آورده‌ایم:

$$A_1(\theta) = e^{-\Gamma t} (4 \cosh(\Gamma_{12} t) - 8 \xi \cos(\theta) \sinh(\Gamma_{12} t)),$$

$$A_2(\theta) = (\theta) = e^{-2\Gamma t} (3 + \cosh(2\Gamma_{12} t) - 2 \xi \cos(2\theta) \sinh(\Gamma_{12} t)^2),$$

$$A_3(\theta) = (\theta) = \cosh(\Gamma_{12} t) - 2 \xi \cos(\theta) \sinh(\Gamma_{12} t) \text{ و}$$

$$A_4(\theta) = e^{-\Gamma t} - \cosh(\Gamma_{12} t) + 2 \xi \cos(\theta) \sinh(\Gamma_{12} t).$$

با استفاده از رابطه (7) می‌توان وفاداری را نیز برای ماتریس چگالی $\rho(t)$ نسبت به حالت اولیه $|\Phi\rangle\langle\Phi|$ به دست آورد:

$$F(\theta) = e^{-\Gamma t} (B_1(\theta) + B_2(\theta) - B_3(\theta)), \quad (15)$$

که در آن:

$$B_1(\theta) = \cos(2g_{12}t) (2\xi^2 \cos(2\theta) (2\xi^2 \cos(2\theta) - 1 - 6\xi^2),$$

$$B_2(\theta) = \cosh(\Gamma_{12}t) (1 + 2\xi^2 + 2\xi^2 \cos(2\theta)) \text{ و}$$

$$B_3(\theta) = \sinh(\Gamma_{12}t) \cos(\theta).$$

$$1) \cos(2g_{12}t) + \cosh(\Gamma_{12}t) + 2\xi \sin(\theta) \sin(2g_{12}t) - 2\xi \cos(\theta) \sinh(\Gamma_{12}t),$$

$$\rho_{01,10} = \rho_{10,01}^* = \frac{1}{2} e^{-\Gamma t} (i(2\alpha - 1) \sin(2g_{12}t) - \sinh(\Gamma_{12}t) - 2i\xi \sin(\theta) \cos(2g_{12}t) + 2\xi \cos(\theta) \cosh(\Gamma_{12}t)) \text{ و}$$

$$\rho_{10,10} = 1 - \rho_{00,00} - \rho_{01,01}.$$

که در آن $\rho_{mn,m'n'} = \langle mn | \rho(t) | m'n' \rangle$ و $\xi = \sqrt{\alpha(1-\alpha)}$ در این مقاله موجبری را در نظر می‌گیریم که ضریب β آن بزرگ نباشد.

برآورد کوانتومی فاز اولیه

هدف ما در نظریه تنها برآورد مقدار واقعی پارامتر مجهول نیست، بلکه یافتن بهترین استراتژی برای استخراج آن است.

در این بخش، فرآیند تخمین فاز اولیه θ را با استفاده از دو کیوبیت درهم‌تنیده M, N, J . مورد بحث قرار می‌دهیم. این فاز اولیه می‌تواند توسط تأثیر یک درگاه فاز¹ یا طی یک آزمایش تداخل‌سنجی در حالت کوانتومی اولیه سیستم کد شده و حاوی اطلاعات مهمی باشد، لذا برآورد آن دارای اهمیت خاصی چه از دیدگاه نظری و چه تجربی است.

نمایش ماتریسی عملگر چگالی به شکل زیر خواهد بود:

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} \rho_{00,00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{01,01} & \rho_{01,10} & 0 \\ 0 & \rho_{10,01} & \rho_{10,10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

که عناصر غیر صفر آن در رابطه (12) آمده است. فرم بالا را می‌توان با تغییر پایه‌ها به صورت بلوک-قطری

$\rho = \bigoplus_{i=1}^n \rho_i$ نوشت که در این رابطه علامت \bigoplus نشان دهنده جمع مستقیم است. در این حالت می‌توان عملگر مشتق لگاریتمی متقارن سامانه دو کیوبیتی را به صورت

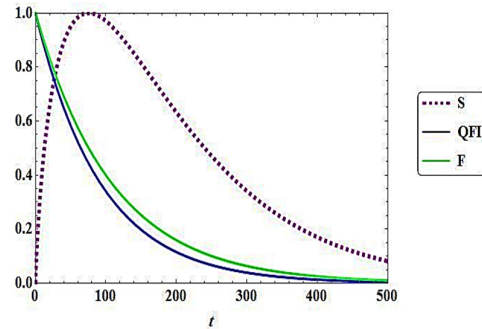
$L = \bigoplus_{i=1}^n L_i$ نمایش داد که L_i ها عملگرهای مشتق لگاریتمی متقارن برای ρ_i است که از رابطه ذیل قابل محاسبه است [49]:

کنترل آن توسط منابع کوانتومی [52] نظیر درهم‌تنیدگی بین دو کیوبیت است. همبستگی‌های کوانتومی این سامانه در مرجع [48] و درهم‌تنیدگی در [47] مورد بحث قرار گرفته است.

در شکل 2، رفتار هر سه معیار بر حسب تغییرات فاصله بین دو کیوبیت در دو بازه مختلف نشان داده شده است. شکل 2 (الف) و (ب) به ترتیب به ازای مقادیر بزرگ و کوچک نرخ گسیل خودبه‌خودی مشترک کیوبیت‌ها ترسیم شده‌اند. در هر دو بازه آنتروپی، اطلاعات فیشر کوانتومی و وفاداری، با افزایش فاصله بین کیوبیت‌ها، رفتار نوسانی با دامنه میرا شونده از خود به نمایش می‌گذارند. با وجود میرایی دامنه، مشاهده می‌شود که اطلاعات فیشر کوانتومی حتی در فواصل دور نیز می‌تواند مقدار غیر صفر داشته باشد و لذا همچنان امکان استخراج اطلاعات از سامانه دو کیوبیتی برای برآورد فاز اولیه فراهم است که از ویژگی‌های جالب و کاربردی کیوبیت‌های م.ن.ج. در فرآیند برآورد کوانتومی است. البته با این وجود باید توجه نمود که بهترین برآورد در فواصل نزدیک‌تر حاصل می‌شود و با دور شدن دو کیوبیت از یکدیگر مقادیر بهینه اطلاعات فیشر کوانتومی نیز کاهش می‌یابند تا در انتها به سمت مقدار ثابتی میل نمایند.

رفتار مشابهی در تغییرات وفاداری و آنتروپی بر حسب فاصله بین کیوبیت‌ها مشاهده می‌شود اما همان طور که در شکل 2 (الف) نشان داده شده است وقتی نرخ گسیل خودبه‌خودی کیوبیت‌ها بزرگ باشد آنتروپی و فیدلیتی رفتار نوسانی مشابه با یکدیگر و البته کاملاً معکوس تغییرات نوسانی اطلاعات فیشر کوانتومی به نمایش می‌گذارند. در نتیجه در فواصلی که بهترین برآورد قابل حصول است آنتروپی و وفاداری کمینه می‌شوند. کمینه شدن درهم‌تنیدگی سامانه با محیط، که با معیار آنتروپی سنجیده می‌شود، قابل توجیه است. اما کمینه شدن وفاداری، با توجه به اینکه وفاداری نسبت به حالت اولیه محاسبه شده است و ما نیز در حالت برآورد فاز اولیه می‌باشیم، بسیار جالب توجه است.

رفتار عجیب‌تر زمانی رخ می‌دهد که نرخ گسیل خودبه‌خودی کیوبیت‌ها کوچک باشد. همان طور که در شکل 2 (ب) مشاهده می‌شود در چنین شرایطی رفتار نوسانی آنتروپی و اطلاعات فیشر کوانتومی بر حسب فاصله بین کیوبیت‌ها، با یکدیگر هم‌آهنگ می‌شود. به عبارت دیگر در فواصلی که درهم‌تنیدگی سامانه با محیط بیشینه است، دقت برآورد نیز بهینه می‌شود. با توجه به اینکه در حال



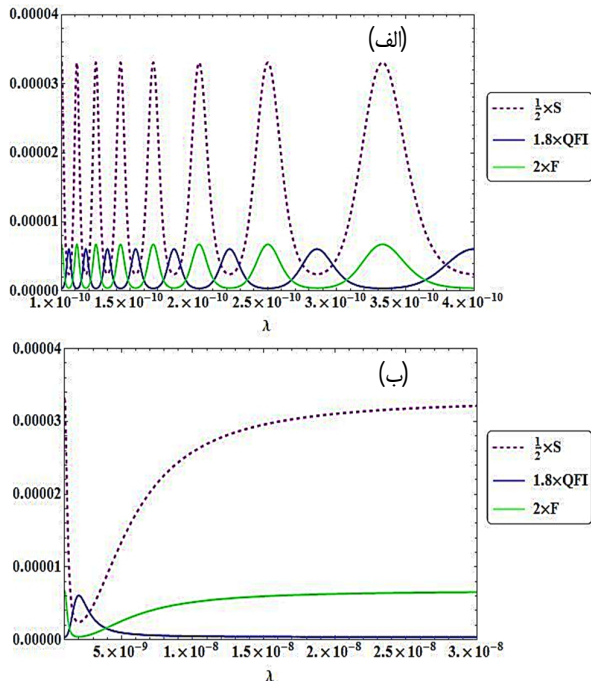
شکل 1. مقایسه تحول آنتروپی فون نیومان، اطلاعات فیشر کوانتومی و وفاداری به ازای $d = 1n$, $l = 2\mu$, $\Gamma = 0.7$, $\lambda = 10n$, $\theta = \pi$ و $\alpha = 0.5$ و $\beta = 0.1$.

در شکل 1، رفتار زمانی آنتروپی فون نیومان، اطلاعات فیشر کوانتومی و وفاداری با یکدیگر مقایسه شده است. همان طور که مشاهده می‌شود اطلاعات فیشر کوانتومی با گذشت زمان دچار افت شده و به سمت صفر میل می‌کند. به دلیل اینکه هدف، برآورد فاز اولیه است، مطابق انتظار، بهترین برآورد در همان لحظه اول به دست می‌آید. اما با گذشت زمان اطلاعاتی که در مورد فاز اولیه قابل دسترسی است، در حال کاهش است. این افت ناشی از دینامیک مارکوفی [50] سامانه است. به طور کلی، هنگام اندرکنش سامانه با محیط بخشی از اطلاعات از سامانه به محیط شارش می‌یابد که اگر این شارش یک طرفه باشد، تحول را مارکوفی می‌نامند. اما در مواردی این امکان وجود دارد که اطلاعات از محیط نیز به سامانه بازگردد که در صورت وجود چنین بازشارشی، تحول را غیرمارکوفی [51] می‌نامند که ریشه آن را می‌توان در وجود حافظه کوانتومی سامانه جستجو کرد.

در سامانه مورد بحث ما، شارش پیوسته و یک‌طرفه اطلاعات از سامانه به محیط، سبب دینامیک مشابهی برای وفاداری می‌شود، به دلیل آنکه با گذشت زمان، اطلاعات مربوط به حالت اولیه در حال کاهش است و در نتیجه وفاداری نیز که نسبت به همان حالت اولیه محاسبه شده دچار کاهش می‌گردد.

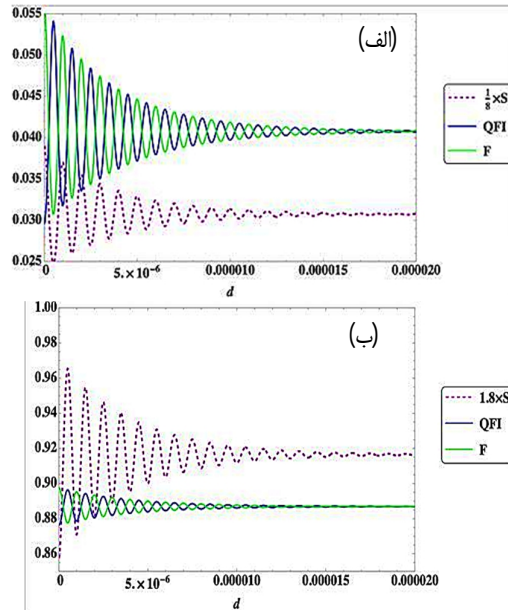
اما رفتار آنتروپی فون نیومان، که معیاری از درهم‌تنیدگی بین سامانه دو کیوبیتی و محیط است، مقدار متفاوت از رفتار متناظر برای اطلاعات فیشر کوانتومی و وفاداری است. شکل 1 نشان می‌دهد که درهم‌تنیدگی بین سامانه و محیط با گذشت زمان ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد. دلیل کاهش درهم‌تنیدگی بین سامانه و محیط،

نکته مهم دیگر در خصوص شکل‌های 3 و 4 این است که دامنه نوسان‌های هر سه معیار در طول موج‌های بلندتر، میرا می‌شود. شکل‌های 3 (الف) و 4 (الف) تغییر معیارها برای طول موج‌های کوتاه‌تر و شکل‌های 3 (ب) و 4 (ب) همان تغییرات به ازای طول موج‌های بزرگتر را نشان می‌دهد. همان طور که در شکل 3 (ب) نمایش داده شده است، وقتی نرخ گسیل خودبه‌خودی بزرگ باشد اطلاعات فیشر کوانتومی با افزایش طول موج پلاسמוنی به سمت صفر میل می‌کند و لذا دقت برآورد فاز اولیه سرکوب می‌شود. در واقع در طول موج‌های بلندتر، به دلیل نرخ بالای گسیل خودبه‌خودی، اطلاعات کد شده اولیه در مورد فاز، از سامانه به محیط به شدت شارش می‌یابد که به دلیل ماهیت مارکوفی فرآیند امکان بازیابی اطلاعات از محیط نیز وجود ندارد. اما اگر نرخ گسیل خودبه‌خودی کوچک باشد این شارش اطلاعات در طول موج‌های بلند پلاسمونی محدود خواهد بود و سامانه می‌تواند با تکیه بر منابع کوانتومی [52] موجود در حالت کوانتومی خود، نظیر هم دوسی و هم بستگی‌های کوانتومی، امکان برآورد فاز حتی در طول موج‌های بلند را هم حفظ نماید.



شکل 3. تغییرات آنتروپی فون نیومان، اطلاعات فیشر کوانتومی و وفاداری بر حسب طول موج پلاسمونی به ازای $\Gamma = 0.7$, $\theta = \pi$, $\alpha = 0.5$ و $\beta = 0.1$. شکل‌های (الف) و (ب) در دو بازه مختلف طول موجی ترسیم شده‌اند.

برآورد یکی از پارامترهای اولیه می‌باشیم و سامانه پس از آن دیگر توسط آن پارامتر تحت تأثیر قرار نگرفته است، بهبود فرآیند برآورد با افزایش درهم‌تنیدگی با محیط بسیار جالب بوده که لزوم پژوهش‌های بیشتر در این زمینه را گوشزد می‌کند.



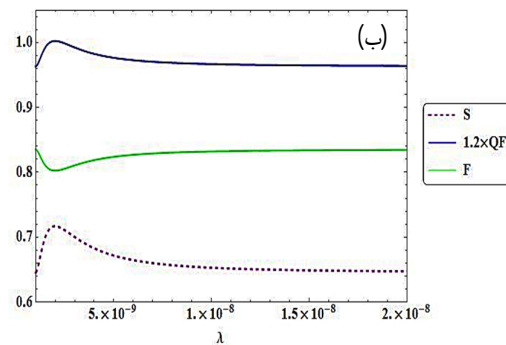
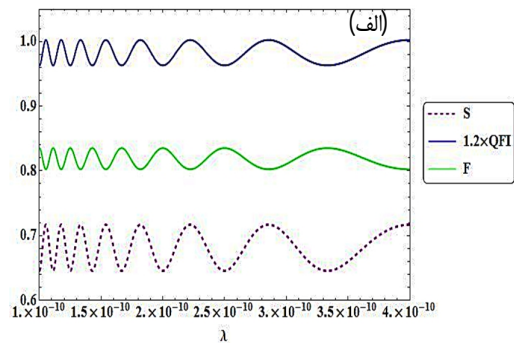
شکل 2. تغییرات آنتروپی فون نیومان، اطلاعات فیشر کوانتومی و وفاداری بر حسب فاصله بین کیوبیت‌ها به ازای $l = 2\mu$, $\Gamma = 0.8$ و $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.1$, $\lambda = 1\mu$, $\theta = \pi$. $\Gamma = 0.001$ (ب)

تغییرات هر سه معیار بر حسب طول موج پلاسمونی در دو بازه مختلف، یعنی وقتی نرخ گسیل خودبه‌خودی بزرگ و کوچک باشد، به ترتیب در شکل‌های 3 و 4 نشان داده شده است. تحلیل و مقایسه رفتار نوسانی هر سه معیار مشابه شکل 2 است. به ویژه اینکه مشاهده می‌شود اطلاعات فیشر کوانتومی و وفاداری مجدداً رفتار نوسانی کاملاً معکوس بر حسب تغییرات طول موج دارند. درهم‌تنیدگی با محیط نیز وقتی نرخ گسیل خودبه‌خودی بزرگ باشد (شکل 3) رفتار نوسانی مشابه با وفاداری و معکوس نسبت به اطلاعات فیشر کوانتومی دارد. اما اگر نرخ گسیل خودبه‌خودی کوچک باشد (شکل 4) تغییرات آن نسبت به طول موج، مشابه رفتار اطلاعات فیشر کوانتومی است. در نتیجه، در طول موج‌های که درهم‌تنیدگی سامانه و محیط بیشینه می‌گردد، شاهد برآورد فاز بهینه خواهیم بود اما وفاداری کمینه می‌شود.

نشان داده شد که در درهم‌تنیدگی سامانه با محیط می‌تواند با گذشت زمان کاهش یابد، رفتاری که در تحول مارکوفی سامانه ممکن است مورد انتظار نباشد. در واقع کاهش آنتروپی با زمان، به عنوان معیار درهم‌تنیدگی مذکور، می‌تواند شاهدهی بروز دینامیک غیرمارکوفی و بازشارش اطلاعات از محیط به سامانه باشد [53] در حالی که چنین رخدادی متناقض با فرض اولیه ما مبنی بر مارکوفی بودن تحول سامانه است. برای حل این تناقض باید به این نکته دقت کرد که آنتروپی فقط در نگاشت‌های یونیتالی [45] می‌تواند به عنوان یک شاهد غیر مارکوفی مورد استفاده قرار گیرد. نگاشت دینامیکی معرفی شده توسط معادله اصلی (8) به دلیل غیر هرمیتی بودن عملگرهای لیندبلاد، غیر یونیتالی است [54]. از این رو کاهش آنتروپی با زمان در مدل مورد بررسی ما شاهدهی بر تحول غیر مارکوفی سامانه نیست.

نکته مهم دیگر، رفتار معکوس اطلاعات فیشر کوانتومی و وفاداری هنگام بررسی تغییرات آنها بر حسب فاصله بین کیوبیت‌ها یا طول موج پلاسמוنی موجبر است. به دلیل اینکه اطلاعات فیشر کوانتومی نسبت به پارامتر اولیه محاسبه شده و وفاداری نیز نسبت به حالت اولیه سنجیده شده است، چنین رفتاری مورد انتظار نیست که شاید بتوان آن را به خاصیت غیر موضعی هر کدام از کیوبیت‌های ن.م.ج نسبت داد. خاصیت غیر موضعی آنها ناشی از جدایی فضایی اتم نیتروژن و جای خالی مربوط به آن است که همین ویژگی آن را از کیوبیت‌های موضعی متفاوت می‌سازد.

نکته نهایی که باید به آن دقت داشت، این است که به دلیل مشترک بودن محیط اندرکنشی کیوبیت‌ها، همبستگی‌های کوانتومی بین دو کیوبیت می‌تواند با گذشت زمان حفظ و حتی افزایش یابد [55]. چنین رفتاری، در سامانه‌هایی که اجزای آن با محیط‌های مستقل از یکدیگر در حال اندرکنش هستند، امکان‌پذیر نیست. در مدل ما، به دلیل حفظ یا افزایش همبستگی‌های کوانتومی بین اجزای سامانه دو کیوبیتی، شاهد آن بودیم که با گذشت زمان درهم‌تنیدگی سامانه با محیط اطراف می‌توانست روند کاهشی داشته باشد. این پدیده در ساخت رایانه‌های کوانتومی و دیگر کاربردهای عملی نظریه اطلاعات کوانتومی که مستلزم کاهش عوامل ناهمدوسی است، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.



شکل 4. تغییرات آنتروپی فون نیومان، اطلاعات فیشر کوانتومی و وفاداری بر حسب طول موج پلاسمونی به ازای $\Gamma = 0.01$ ، $\alpha = 0.5$ و $\beta = 0.1$ ، $d = 1 \text{ n}$ ، $\theta = \pi$ ، $l = 2 \mu$

نتیجه‌گیری و بحث

در این مقاله از مرکز نیتروژن-جای خالی (ن.م.ج) که یکی از نقص‌های معروف در شبکه‌های نقطه‌ای معروف در الماس است برای برآورد کوانتومی فاز استفاده شده است. سامانه کوانتومی مورد بررسی متشکل از دو ن.م.ج بود که هر یک را می‌توان به عنوان کیوبیت در نظر گرفت. این سامانه دو کیوبیتی با مدهای یک موجبر پلاسمونیک که دارای طول موج پلاسمونی معینی است، در حال اندرکنش بود. رفتار اطلاعات فیشر کوانتومی، به عنوان معیاری از دقت برآورد فاز، نسبت به زمان و همچنین پارامترهای قابل کنترل مورد بررسی قرار گرفت. همچنین رفتار اطلاعات فیشر کوانتومی با آنتروپی، که معیاری از میزان درهم‌تنیدگی سامانه دو کیوبیتی با محیط است، و همچنین وفاداری، که میزان دور شدن حالت تحول‌یافته سامانه نسبت به آماده‌سازی اولیه را نشان می‌داد، مورد مقایسه قرار گرفت.

References

- [1] Haroche S, Raimond J-M. Cavity quantum electrodynamics. *Sci Am* 1993; 268: 54–62.
- [2] Kjaergaard M, Schwartz ME, Braumüller J, Krantz P, Wang JI-J, Gustavsson S, et al. Superconducting qubits: Current state of play. *Annual Review of Condensed Matter Physics* 2020;11:369–95.
- [3] Fan L, Zou C-L, Cheng R, Guo X, Han X, Gong Z, et al. Superconducting cavity electro-optics: a platform for coherent photon conversion between superconducting and photonic circuits. *Sci Adv* 2018;4:eaar4994.
- [4] Cubaynes T, Contamin LC, Dartiailh MC, Desjardins MM, Cottet A, Delbecq MR, et al. Nanoassembly technique of carbon nanotubes for hybrid circuit-QED. *Applied Physics Letters* 2020;117:114001.
- [5] Macêdo R, Holland RC, Baity PG, McLellan LJ, Livesey KL, Stamps RL, et al. Electromagnetic approach to cavity spintronics. *Physical Review Applied* 2021;15:24065.
- [6] Wang K, Dahan R, Shentcis M, Kauffmann Y, ben Hayun A, Reinhardt O, et al. Coherent interaction between free electrons and a photonic cavity. *Nature* 2020;582:50–4.
- [7] Zhang Y, Wu Q, Su S-L, Lou Q, Shan C, Mølmer K. Cavity Quantum Electrodynamics Effects with Nitrogen Vacancy Center Spins Coupled to Room Temperature Microwave Resonators. *Physical Review Letters* 2022;128:253601.
- [8] Yang W, Conkey DB, Wu BIN, Yin D, Hawkins AR, Schmidt H. Atomic spectroscopy on a chip. *Nature Photonics* 2007;1:331–5.
- [9] Hao YM, Lin GW, Lin XM, Niu YP, Gong SQ. Single-photon transistor based on cavity electromagnetically induced transparency with Rydberg atomic ensemble. *Sci Rep* 2019;9:1–7.
- [10] White AD, Trivedi R, Narayanan K, Vučković J. Enhancing Superradiance in Spectrally Inhomogeneous Cavity QED Systems with Dynamic Modulation. *ACS Photonics* 2022;9:2467–72.
- [11] Russell KJ, Liu T-L, Cui S, Hu EL. Large spontaneous emission enhancement in plasmonic nanocavities. *Nature Photonics* 2012;6:459–62.
- [12] Der Sar T, Wang ZH, Blok MS, Bernien H, Taminiau TH, Toyli DM, et al. Decoherence-protected quantum gates for a hybrid solid-state spin register. *Nature* 2012;484:82–6.
- [13] Pan X-Y, Liu G-Q, Yang L-L, Fan H. Solid-state optimal phase-covariant quantum cloning machine. *Applied Physics Letters* 2011;99:51113.
- [14] Wu Y, Wang Y, Qin X, Rong X, Du J. A programmable two-qubit solid-state quantum processor under ambient conditions. *Npj Quantum Information* 2019;5:1–5.
- [15] Zhang J, Hegde SS, Suter D. Efficient implementation of a quantum algorithm in a single nitrogen-vacancy center of diamond. *Physical Review Letters* 2020; 125: 30501.
- [16] Gaebel T, Domhan M, Popa I, Wittmann C, Neumann P, Jelezko F, et al. Room-temperature coherent coupling of single spins in diamond. *Nature Physics* 2006; 2:408–13.
- [17] Fuchs GD, Dobrovitski Vv, Toyli DM, Heremans FJ, Awschalom DD. Gigahertz dynamics of a strongly driven single quantum spin. *Science* (1979) 2009;326:1520–2.
- [18] Shim JH, Niemeyer I, Zhang J, Suter D. Room-temperature high-speed nuclear-spin quantum memory in diamond. *Physical Review A* 2013; 87: 12301.
- [19] Irber DM, Poggiali F, Kong F, Kieschnick M, Lüthmann T, Kwiatkowski D, et al. Robust all-optical single-shot readout of nitrogen-vacancy centers in diamond. *Nat Commun* 2021;12:1–6.
- [20] Kosaka H, Niikura N. Entangled absorption of a single photon with a single spin in diamond. *Phys Rev Lett* 2015; 114: 53603.
- [21] Hensen B, Bernien H, Dréau AE, Reiserer A, Kalb N, Blok MS, et al. Loophole-free Bell inequality violation using electron spins separated by 1.3 kilometres. *Nature* 2015;526:682–6.
- [22] Pfaff W, Hensen BJ, Bernien H, van Dam SB, Blok MS, Taminiau TH, et al. Unconditional quantum teleportation between distant solid-state quantum bits. *Science* (1979) 2014;345:532–5.
- [23] Fu Y, Liu W, Ye X, Wang Y, Zhang C, Duan C-K, et al. Experimental investigation of quantum correlations in a two-qutrit spin system. *ArXiv Preprint ArXiv:220805618* 2022.
- [24] Helstrom CW. Quantum detection and estimation theory. *Journal of Statistical Physics* 1969;1:231–52.
- [25] Giovannetti V, Lloyd S, Maccone L. Advances in quantum metrology. *Nat Photonics* 2011;5:222–9.
- [26] Giovannetti V, Lloyd S, Maccone L. Quantum metrology. *Phys Rev Lett* 2006;96:10401.
- [27] Liu J, Zhang M, Chen H, Wang L, Yuan H. Optimal scheme for quantum metrology. *Advanced Quantum Technologies* 2022;5:2100080.
- [28] Yang J, Pang S, Chen Z, Jordan AN, del Campo A. Variational principle for optimal quantum controls in quantum metrology. *Physical Review Letters* 2022; 128: 160505.

- [29] Barbieri M. Optical Quantum Metrology. *PRX Quantum* 2022;3:10202.
- [30] Albarelli F, Demkowicz-Dobrzański R. Probe incompatibility in multiparameter noisy quantum metrology. *Physical Review X* 2022;12:11039.
- [31] Jahromi HR, Franco R lo. Hilbert–Schmidt speed as an efficient figure of merit for quantum estimation of phase encoded into the initial state of open n-qubit systems. *Scientific Reports* 2021;11.
- [32] Zhang Z, Zhuang Q. Distributed quantum sensing. *Quantum Science and Technology* 2021;6:43001.
- [33] Degen CL, Reinhard F, Cappellaro P. Quantum sensing. *Rev Mod Phys* 2017; 89: 35002.
- [34] Rembold P, Oshnik N, Müller MM, Montanero S, Calarco T, Neu E. Introduction to quantum optimal control for quantum sensing with nitrogen-vacancy centers in diamond. *AVS Quantum Science* 2020;2:24701.
- [35] Soshenko V v, Bolshedvorskii S v, Rubinas O, Sorokin VN, Smolyaninov AN, Vorobyov V v, et al. Nuclear spin gyroscope based on the nitrogen vacancy center in diamond. *Physical Review Letters* 2021;126:197702.
- [36] Rangani Jahromi H. Parameter estimation in plasmonic QED. *Optics Communications* 2018;411:119–25.
- [37] Paris MGA. Quantum estimation for quantum technology. *International Journal of Quantum Information* 2009;7:125–37.
- [38] Haine SA. Mean-field dynamics and Fisher information in matter wave interferometry. *Physical Review Letters* 2016;116:230404.
- [39] Zhong W, Sun Z, Ma J, Wang X, Nori F. Fisher information under decoherence in Bloch representation. *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics* 2013;87. <https://doi.org/10.1103/Phys-RevA.87.022337>.
- [40] Jiang Z. Quantum Fisher information for states in exponential form. *Physical Review A* 2014;89:32128.
- [41] Liu J, Yuan H, Lu X-M, Wang X. Quantum Fisher information matrix and multiparameter estimation. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 2019; 53: 23001.
- [42] Wootters WK. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. *Physical Review Letters* 1998;80:2245.
- [43] Popescu S, Rohrlich D. On the measure of entanglement for pure states. Citeseer; 1997.
- [44] Bennett CH, Bernstein HJ, Popescu S, Schumacher B. Concentrating partial entanglement by local operations. *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics* 1996;53. <https://doi.org/10.-1103/PhysRevA.53.2046>.
- [45] Nielsen MA, Chuang I. *Quantum computation and quantum information* 2002.
- [46] Jozsa R. Fidelity for mixed quantum states. *J Mod Opt* 1994;41:2315–23.
- [47] Gonzalez-Tudela A, Martin-Cano D, Moreno E, Martin-Moreno L, Tejedor C, Garcia-Vidal FJ. Entanglement of two qubits mediated by one-dimensional plasmonic waveguides. *Phys Rev Lett* 2011;106:20501.
- [48] Yang W, An J-H, Zhang C, Chen C, Oh CH. Dynamics of quantum correlation between separated nitrogen-vacancy centers embedded in plasmonic waveguide. *Sci Rep* 2015;5:1–9.
- [49] Liu J, Yuan H, Lu XM, Wang X. Quantum Fisher information matrix and multiparameter estimation. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 2020;53. <https://doi.org/10.1088/1751-8121/ab5d4d>.
- [50] Gudder S. Quantum markov chains. *Journal of Mathematical Physics* 2008;49:72105.
- [51] de Vega I, Alonso D. Dynamics of non-Markovian open quantum systems. *Reviews of Modern Physics* 2017;89:15001.
- [52] Chitambar E, Gour G. Quantum resource theories. *Rev Mod Phys* 2019;91:25001.

COPYRIGHTS



© 2022 by the authors Licensee PNU, Tehran, Iran This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution 4 0 International (CC BY4 0) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4 0>)