

«مقاله پژوهشی»

## کاهش پراکندگی و شرط نامرئی سازی در فراماده لایه‌ای استوانه‌ای گرافنی

ابوذر صالحی ابرقویی<sup>1</sup>، محمدرضا فروزش‌فرد<sup>2\*</sup>

1. کارشناسی ارشد فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان

2. استادیار، گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان

تاریخ دریافت: 1400/09/01 تاریخ پذیرش: 1400/11/01

## Scattering Reduction and Invisibility Condition in a Cylindrical Layered Graphenic Metamaterial

A. Salehi Abarghuei<sup>1</sup>, M. Forouzesfard<sup>\*2</sup>

1. M.Sc. in Physics, Faculty of Science, Vali-E-Asr University of Rafsanjan

2. Assistant Professor, Department of Physics, Faculty of Science, Vali-E-Asr University of Rafsanjan

Received: 2021/11/22 Accepted: 2022/02/20

### Abstract

Plasmonic cloaking is one of the invisibility methods which is very attractive for researchers. Despite of non-perfect nature of this method there are some advantages such as easier practical realization for it. In this paper, considering cylindrical layered metamaterial with composition of graphene and  $TiO_2$  layers, wave equation is solved for this structure analytically. After calculating scattering cross section, invisibility condition is investigated in the structure. Then, the effect of changing in some geometrical and physical parameters such as chemical potential, core radius and number of layers on invisibility condition is analyzed. Some numerical simulation using COMSOL approve the results.

### Keywords

Scattering Cross Section, Plasmonic Cloaking, Layered Metamaterial, Invisibility Condition, Graphene

### چکیده

نامرئی‌سازی پلاسمونیک یکی از انواع روش‌های نامرئی‌سازی است که بسیار مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته است. این روش نامرئی‌سازی علی‌رغم کامل نبودن، مزایایی مثل امکان تحقق ساده‌تر به صورت تجربی را دارا است. در این مقاله با در نظر گرفتن ساختار فراماده لایه‌ای استوانه‌ای با لایه‌هایی از جنس گرافن و  $TiO_2$ ، به حل معادله موج به صورت تحلیلی پرداخته می‌شود. پس از محاسبه سطح مقطع پراکندگی برای این ساختار، شرط نامرئی شدن در آن مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. سپس اثر تغییر برخی پارامترهای هندسی و فیزیکی مثل پتانسیل شیمیایی گرافن، شعاع هسته و تعداد لایه‌ها بر شرایط نامرئی‌سازی ارزیابی خواهد شد. با انجام شبیه‌سازی‌های عددی در نرم‌افزار کامسول صحت برخی از نتایج تأیید می‌شود.

### واژه‌های کلیدی

سطح مقطع پراکندگی، نامرئی‌سازی پلاسمونیک، فراماده لایه‌ای، شرط نامرئی‌سازی، گرافن

## مقدمه

از سال 2006 که اولین مقاله‌ها در معرفی مبانی نظری نامرئی‌سازی به طور هم‌زمان توسط پندری و همکاران [1] و لئون هارت [2] در یک شماره از مجله ساینس به چاپ رسید، تا به امروز روش‌های مختلفی از نامرئی‌سازی در مقالات گزارش شده است. نامرئی‌سازی با استفاده از شل‌های داخلی [1 و 2]، خارجی [3] و شل فرش‌ها [4] سه روش از نامرئی‌سازی هستند که زمینه نظری آن بر پایه نظریه اپتیک تبدیل استوار است. نامرئی‌سازی پلاسمونیک [4-8] یکی دیگر از انواع روش‌های نامرئی‌سازی است که مبانی نظری آن بر پایه کاهش سطح مقطع پراکندگی استوار است. انواع دیگری از نامرئی‌سازی مثل نامرئی‌سازی با استفاده از ابزارهای ساده مثل عدسی‌ها، آینه‌ها و منشورها در حوزه اپتیک هندسی نیز در سال‌های اخیر گزارش شده است [9].

اگرچه نامرئی‌سازی را می‌توان به معنی سطح مقطع پراکندگی صفر یا بسیار کوچک تعریف کرد اما از نقطه نظر سطح مقطع پراکندگی نیز تفاوت‌هایی بین انواع مختلف نامرئی‌سازی وجود دارد. محاسبات نظری برای نامرئی‌سازی‌های بر پایه اپتیک تبدیل (داخلی، خارجی و شل فرش‌ها) سطح مقطع پراکندگی دقیقاً صفر را به دست می‌دهد [10]، در حالی که نامرئی‌سازی پلاسمونیک در واقع هیچ وقت کامل نیست و سطح مقطع پراکندگی در آن هر چند بسیار ناچیز است اما به طور مطلق صفر نمی‌شود.

از طرف دیگر به دلیل پیچیدگی‌ها و مشکلاتی که در تحقق تجربی نامرئی‌سازی بر پایه اپتیک تبدیل به ویژه شل‌های داخلی و خارجی وجود دارد [2]، نامرئی‌سازی پلاسمونیک همواره یکی از گزینه‌های در دسترس برای برقراری نامرئی‌سازی در آزمایشگاه است.

این مقاله به نامرئی‌سازی پلاسمونیک اختصاص دارد. در این روش از نامرئی‌سازی تلاش می‌شود با قرار دادن پوششی مناسب روی جسم سطح مقطع پراکندگی کل ساختار را به صفر نزدیک کرد [5]. هنگامی که نور به یک جسم برخورد می‌کند درون جسم دوقطبی‌های الکتریکی و مغناطیسی القا می‌کند. حال اگر پوششی روی این جسم قرار داده شود به گونه‌ای که جهت دو قطبی‌های پوشش مخالف جهت دو قطبی‌های جسم (هسته) باشد، برآیند دو قطبی‌های جسم و پوشش می‌توانند یکدیگر را خنثی کرده و

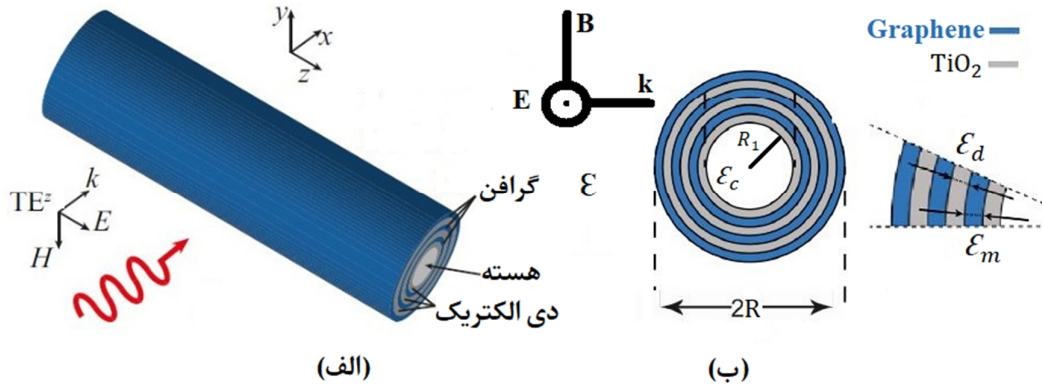
در نتیجه برآیند ممان دوقطبی‌ها به صفر نزدیک شود. انقطاع و همکارانش در سال 2005 مسئله بررسی شرط نامرئی‌شدن برای کره‌های پوشش‌دار را به صورت نظری مورد بررسی قرار داده و به این نتیجه رسیدند که برای داشتن سطح مقطع پراکندگی بسیار ناچیز در این کره‌های پوشش‌دار، باید گذردهی الکتریکی پوسته در آنها بسیار نزدیک صفر (مثبت یا منفی) باشد [5]. دقت در این نکته لازم است که وجود ماده‌ای با گذردهی الکتریکی صفر یا بسیار نزدیک صفر در طبیعت مورد سؤال است. بنابراین چنین پوششی باید به صورت مصنوعی ساخته شود.

کیم و همکارانش در سال 2015 ادعا کردند که با استفاده از ساختارهای فراماده‌ای لایه‌ای می‌توان گذردهی الکتریکی مؤثر نزدیک صفر ایجاد کرد. این ساختارهای لایه‌ای متشکل از لایه‌هایی تناوبی با ترکیبی از لایه‌های فلز با گذردهی الکتریکی منفی و دی‌الکتریک با گذردهی الکتریکی مثبت بوده و می‌توانند گذردهی الکتریکی مؤثر صفر تولید کنند [11].

در بررسی تحلیلی مسئله برهمکنش موج الکترومغناطیسی با محیط‌های لایه‌ای در مقالات مختلف روش‌های متفاوتی پیشنهاد شده است. در برخی از پژوهش‌ها برای محیط لایه‌ای با استفاده از نظریه محیط‌های مؤثر، گذردهی الکتریکی مؤثری (معمولاً صفر) در نظر گرفته می‌شود [12-15]. روش دیگری که در برخی مقالات مورد استفاده قرار می‌گیرد، شامل حل تحلیلی معادله موج در هر لایه به طور جداگانه و اعمال شرایط مرزی در بین لایه‌ها است [16 و 17]. جنس، تعداد لایه‌ها و هندسه ساختار در این پژوهش‌ها با هم متفاوت است.

در این مقاله حل تحلیلی معادله موج ماکسول در یک ساختار لایه‌ای استوانه‌ای متشکل از  $N$  لایه از دو ماده مختلف مورد بررسی قرار می‌گیرد. به عنوان مثالی از این حل تحلیلی، ساختاری لایه‌ای متشکل از دو ماده گرافن و  $TiO_2$  را مورد بررسی قرار داده و ضمن محاسبه سطح مقطع پراکندگی در این ساختار شرط نامرئی شدن را برای آن تحقیق کرده‌ایم. در پایان با استفاده از نرم‌افزار کامسول ساختار فوق را برای تحقق شرط نامرئی‌سازی و به منظور بررسی صحت محاسبات انجام شده، شبیه‌سازی کرده‌ایم.

بخش‌های مختلف مقاله به شرح زیر است. ابتدا در بخش مبانی نظری ضمن معرفی ساختار به حل تحلیلی



شکل 1. طرحواره ساختار مورد بررسی در این مقاله (الف) در سه بعد (ب) در دو بعد

محیط پیرامون از یک نوع هستند، روابط را برای گذردهی الکتریکی  $\epsilon$  حل می‌کنیم و در پایان برای هر محیط،  $\epsilon$  مورد نظر را جایگذاری می‌کنیم.

موج فرودی، موج تخت TE (میدان الکتریکی در راستای محور Z) است که به وسیله بردار موج  $k$  در راستای محور X توصیف می‌شود. در معادلات ماکسول، قسمت مستقل از زمان میدان الکتریکی و مغناطیسی به صورت زیر

است [18]

$$\nabla \times \mathbf{H} = -i\omega\epsilon_0\epsilon\mathbf{E}, \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mu_0\mathbf{H}; \quad (2)$$

که  $\epsilon_0$  و  $\mu_0$  به ترتیب گذردهی الکتریکی و مغناطیسی خلاء هستند. در مختصات استوانه‌ای معادلات (1) و (2) به معادلات زیر تبدیل می‌شوند.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} = -i\omega\epsilon_0\epsilon E_r,$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = -i\omega\epsilon_0\epsilon E_\phi, \quad (3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH_\phi) - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \phi} = -i\omega\epsilon_0\epsilon E_z,$$

و

$$\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z} = i\omega\mu_0 H_r,$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = i\omega\mu_0 H_\phi, \quad (4)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE_\phi) - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \phi} = i\omega\mu_0 H_z.$$

به این دلیل که قطبش TE را در نظر گرفته‌ایم، میدان الکتریکی در راستای محور Z و بنابراین  $E_r$  و  $E_\phi$  صفر

معادله موج ماکسول در ساختار فراماده مورد نظر پرداخته‌ایم. در بخش بعد ویژگی‌های اپتیکی مواد تشکیل دهنده ساختار پیشنهادی را معرفی می‌کنیم و در بخش پایانی نتیجه‌گیری و بحث در نتایج مطرح خواهد شد و با انجام شبیه‌سازی‌ها صحت محاسبات را تأیید کرده‌ایم.

### مبانی نظری

پوسته‌ای استوانه‌ای مطابق شکل 1 در نظر بگیرید که دارای شعاع داخلی  $R_1$  و شعاع خارجی  $R = R_{(N+1)}$  است. هسته آن از محیطی با گذردهی الکتریکی  $\epsilon_c$  پر شده است و کل این ساختار درون محیطی با گذردهی الکتریکی  $\epsilon$  قرار دارد. پوسته از  $N$  لایه با ضخامت  $t = R_{(N+1)} - R_1 < R$  تشکیل شده است که ترکیبی از دو محیط با گذردهی الکتریکی  $\epsilon_m$  و  $\epsilon_d$  است و به صورت تناوبی تکرار شده‌اند. تعداد لایه‌های  $N$  وابسته به مسئله مورد بررسی قابل تنظیم است. باید توجه داشته باشیم که تمام محیط‌ها بدون پاسخ مغناطیسی در نظر گرفته شده‌اند (یعنی  $\mu = \mu_c = \mu_m = \mu_d = 1$ ). در قسمت پوسته با آرایه‌ای دوره‌ای از دو محیط  $\epsilon_m$  و  $\epsilon_d$  روبه‌رو هستیم، به گونه‌ای که دوره تناوب سلول واحد  $\Lambda = W_d + W_m$  است، که در آن  $W_d$  ضخامت محیط  $\epsilon_d$  و  $W_m$  ضخامت محیط با گذردهی  $\epsilon_m$  است. در بخش بعدی مقاله دو محیط  $\epsilon_m$  و  $\epsilon_d$  به ترتیب از جنس  $TiO_2$  و گرافن انتخاب خواهند شد.

هدف، محاسبه میدان‌های پراکنده شده از این ساختار و یافتن سطح مقطع پراکندگی از آن است. برای راحتی کار چون با محیط‌های همسانگرد سر و کار داریم و معادلات ماکسول مربوط به تمام لایه‌های پوسته، هسته و همچنین

$$E_{sca} = -\hat{z}E_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n a_n H_n^{(1)}(kr) e^{in\phi} \quad (9)$$

که در آن ضریب پراکندگی لورنتز-مای است که باید تعیین شود. میدان الکتریکی کل در محیط پیرامون به صورت زیر به دست می آید.

$$E_{tot} = E_{in} + E_{sca} \quad (10)$$

$$\hat{z}E_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n [J_n(kr) - a_n H_n^{(1)}(kr)] e^{in\phi}.$$

در یکی از لایه‌های پوسته  $R_q < r < R_{q+1}$  جایی که  $q = \{1, 2, \dots, N\}$  میدان الکتریکی به صورت زیر است

$$E_q = \hat{z}E_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n [b_{n,q} J_n(k_q r) + c_{n,q} Y_n(k_q r)] e^{in\phi} \quad (11)$$

که عدد موج  $k_q = k_0 \sqrt{\epsilon_d}$  مربوط به دی الکتریک  $\text{TiO}_2$  و  $k_q = k_0 \sqrt{\epsilon_m}$  مربوط به گرافن است. در نهایت میدان الکتریکی درون هسته  $r < R_1$  به صورت زیر بیان می شود

$$E_c = \hat{z}E_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n d_n J_n(k_c r) e^{in\phi} \quad (12)$$

که عدد موج در هسته  $k_c = k_0 \sqrt{\epsilon_c}$  است. ضرایب پراکندگی لورنتز - مای  $a_n, b_{n,q}, c_{n,q}, d_n$  با استفاده از شرایط مرزی مناسب، یعنی پیوستگی مؤلفه  $Z$  میدان الکتریکی و مؤلفه  $\phi$  میدان مغناطیسی،  $H_\phi = \frac{i}{\omega} \frac{\partial E_z}{\partial r}$ ، تعیین می شوند [19].

برای شرط مرزی در  $r = R$  بین بیرونی ترین لایه و محیط خارجی پس از نوشتن روابط مربوط به شرایط مرزی و تبدیل آن به شکل ماتریسی داریم:

$$D_{n,N+1}(R) \begin{bmatrix} 1 - a_n \\ -i a_n \end{bmatrix} = D_{n,N}(R) \begin{bmatrix} b_{n,N} \\ c_{n,N} \end{bmatrix} \quad (13)$$

طوری که

هستند. با قرار دادن  $E_r = E_\phi = 0$  در روابط (3) و (4)،  $H_r$  و  $H_\phi$  به صورت زیر به دست می آید.

$$H_r = \frac{1}{i\omega\mu_0 r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi}, \quad (5)$$

$$H_\phi = -\frac{1}{i\omega\mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial r}, \quad (6)$$

با جایگذاری روابط (5) و (6) در رابطه (3) و برخی ساده سازی ها نتیجه زیر حاصل می شود

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial E_z}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\partial E_z}{\partial \phi} \right) + k_0^2 \epsilon E_z = 0 \quad (7)$$

که در آن

$$k_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

با استفاده از روش جداسازی متغیرها جواب معادله (7) را به شکل  $E_z = R(r)\Phi(\phi)$  در نظر می گیریم. با جایگذاری این جوابها در معادله و پس از بازاری روابط به شکل مرسوم در روش جداسازی متغیرها روابط زیر حاصل می شوند.

$$\frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} + n^2 \Phi(\phi) = 0$$

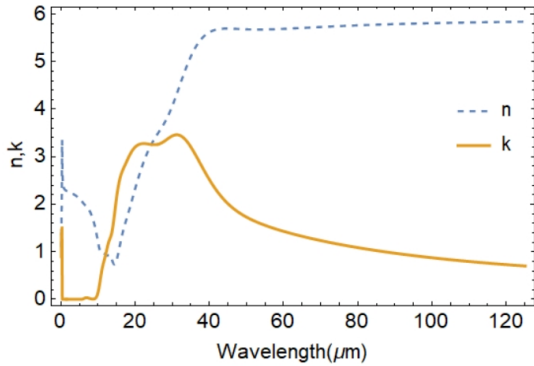
$$r^2 \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + r \frac{dR(r)}{dr} + (k_0^2 \epsilon r^2 - n^2) R(r) = 0$$

جواب معادله زاویه ای به صورت  $\Phi(\phi) \sim e^{in\phi}$  است که در آن  $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  معادله شعاعی معادله بسل استوانه ای با جوابهای  $J_n$  و  $Y_n$  است که در آن  $J_n$  و  $Y_n$  به ترتیب نشان دهنده توابع بسل نوع اول و دوم از مرتبه  $n$  هستند [19].

با دانستن جواب معادله موج در یک استوانه همسانگرد، حال می توانیم به مسئله اصلی برگردیم. موج فرودی موج تخت بود که بسط آن در مختصات استوانه ای بر حسب توابع بسل استوانه ای به صورت زیر است [18 و 19]

$$E_z = \hat{z}E_0 e^{ik_z r} = \hat{z}E_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n J_n(kr) e^{in\phi} \quad (8)$$

که در آن  $k = \sqrt{\epsilon} k_0$  و  $E_0$  یک دامنه ثابت است. میدان الکتریکی موج پراکنده در محیط بیرون  $r > R$  به صورت زیر است



شکل 2. قسمت حقیقی و موهومی ضریب شکست  $TiO_2$  [20]

ضرایب لورنتز-مای مربوط به امواج درون هسته، با ضرایب لورنتز-مای موج در محیط بیرون را بدون محاسبه میدان در محیط پوسته توسط ماتریس زیر بیان کرد

$$\begin{bmatrix} d_n \\ 0 \end{bmatrix} = M_n \begin{bmatrix} 1 - a_n \\ -i a_n \end{bmatrix} \quad (17)$$

که در آن

$$M_n = \begin{bmatrix} M_{n,11} & M_{n,12} \\ M_{n,21} & M_{n,22} \end{bmatrix}$$

$$M_n = [D_{n,c}(R_1)]^{-1}.$$

$$\left\{ \prod_{q=1}^N D_{n,q}(R_q) \cdot [D_{n,q}(R_{q+1})]^{-1} \right\} \cdot D_{n,N+1}(R_{N+1}) \quad (18)$$

با استفاده از این ماتریس و قراردادن آن در رابطه (17)

می‌توان ضریب پراکندگی  $a_n$  را به صورت زیر به دست آورد

$$a_n = \frac{M_{n,21}}{M_{n,21} + iM_{n,22}};$$

و نهایتاً سطح مقطع پراکندگی به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$D_{n,q}(R_q) = \begin{bmatrix} J_n(k_q R_q) & Y_n(k_q R_q) \\ Z_q^{-1} J_n'(k_q R_q) & Z_q^{-1} Y_n'(k_q R_q) \end{bmatrix}. \quad (14)$$

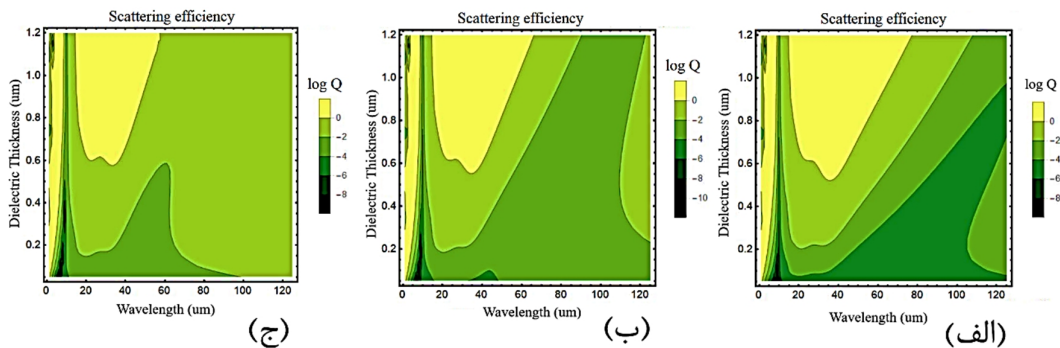
در این روابط  $Z_q$  نشان‌دهنده امپدانس است و در لایه دی‌الکتریک برابر با  $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_d}}$ ، برای محیط گرافن برابر با  $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_m}}$  و  $\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$  برای محیط پیرامون است.  $R_q$  بسته به مرز مورد بررسی، شعاع لایه مرزی را نشان می‌دهد که در مورد معادله فوق برابر  $R_{N+1} = R$  است.  $k_q$  برای محیط بیرون (ماتریس سمت چپ در رابطه (13)) برابر با  $k$  و برای بیرونی‌ترین لایه (ماتریس سمت راست در رابطه (13)) برابر با  $k_N$  است که بستگی به گرافن یا عایق بودن قابل تنظیم است. مشابه همین کار شرایط مرزی در درونی‌ترین لایه یعنی در  $R = R_1$  به صورت زیر در می‌آید

$$D_{n,c}(R_1) \begin{bmatrix} d_n \\ 0 \end{bmatrix} = D_{n,1}(R_1) \begin{bmatrix} b_{n,1} \\ c_{n,1} \end{bmatrix} \quad (15)$$

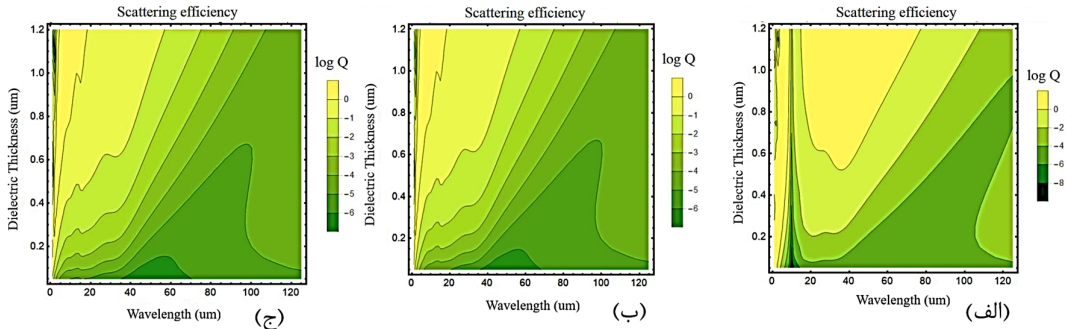
که در آن  $Z_c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_c}}$ ، همچنین با اعمال شرایط مرزی در مرز بین دوتا از لایه‌های پوسته یعنی در  $r = R_{q+1}$  بین لایه  $q$  و  $q+1$  داریم:

$$D_{n,q}(R_{q+1}) \begin{bmatrix} b_{n,q} \\ c_{n,q} \end{bmatrix} = D_{n,q+1}(R_{q+1}) \begin{bmatrix} b_{n,q+1} \\ c_{n,q+1} \end{bmatrix} \quad (16)$$

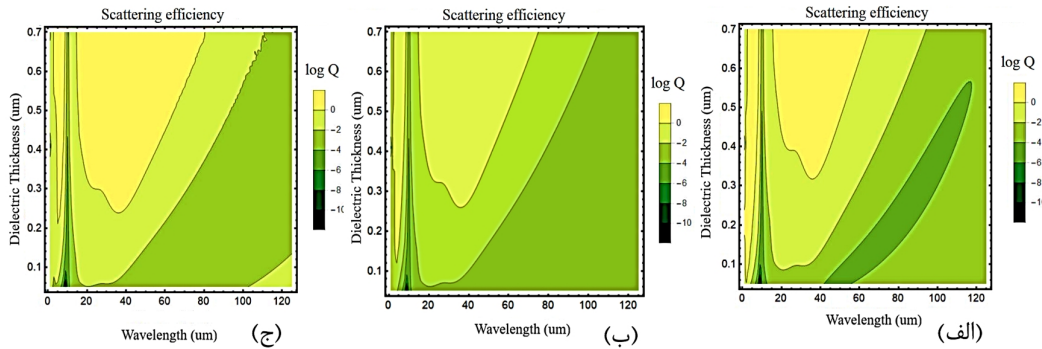
حال می‌توانیم با استفاده از روشی استقرایی ارتباط بین ضرایب پراکندگی لایه‌های مختلف پوسته را با یکدیگر پیدا کنیم به گونه‌ای که در نهایت ضرایب پراکندگی اولین و آخرین لایه به هم مرتبط شود و در انتها می‌توان ارتباط بین



شکل 3. نمودار بازده پراکندگی  $\ln Q$  برای ساختار شکل 1 تحت تابش موج تخت TE در حالت الف)  $E_f = 0.3 \text{ eV}$  ب)  $E_f = 0.6 \text{ eV}$  ج)  $E_f = 1 \text{ eV}$



شکل 4. نمودار بازده پراکندگی  $\ln Q$  برای ساختار شکل 1 تحت تابش موج تخت TE در حالت الف)  $\epsilon_c = 10$  ب)  $\epsilon_c = 10$  و ج)  $\epsilon_c = 10$  و  $\epsilon = 10$



شکل 5. نمودار بازده پراکندگی  $\ln Q$  برای ساختار شکل 1 تحت تابش موج تخت TE در حالت الف)  $R_1 = 0.5 \mu m$  ب)  $R_1 = 0.5 \mu m$  و ج)  $R_1 = 1.5 \mu m$  و  $1 \mu m$

برای رسانندگی گرافن از رابطه زیر که در مراجع [22و21] آمده است، استفاده می‌کنیم.

$$\sigma = \sigma_{intra} + \sigma_{inter}$$

$$\sigma_{intra} = \frac{\sigma}{2ik_B T e^2} = \frac{e^2}{\pi \hbar^2} \left( \omega + \frac{i}{\tau} \right) \times \ln \left[ 2 \cosh \left( \frac{E_f}{2K_B T} \right) \right]$$

$$\sigma_{inter} = \frac{e^2}{4\hbar} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \left( \frac{\hbar\omega - 2E_f}{2K_B T} \right) - \frac{i}{2\pi} \ln \frac{(\hbar\omega + 2E_f)^2}{(\hbar\omega - 2E_f)^2 + (2K_B T)^2} \right]$$

در این رابطه  $k_B$  ثابت بولتزمن،  $T$  دما بر حسب کلونین،  $E_f$  پتانسیل شیمیایی (انرژی فرمی)،  $\hbar$  ثابت پلانک،  $\tau$  زمان واهلش و  $\omega$  فرکانس موج الکترومغناطیسی است. گذردهی الکتریکی نسبی گرافن توسط رابطه زیر به رسانندگی سطحی آن مربوط می‌شود [18]

$$Q_{sca} = \frac{2}{kR} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^2 \quad (19)$$

در این رابطه اگر ضرایب پراکندگی  $a_n$  به طور همزمان به مقدار صفر نزدیک شوند، سطح مقطع پراکندگی بسیار ناچیز خواهد شد و شرط نامرئی‌سازی محقق می‌شود.

#### مدل‌سازی مواد

همان‌طور که پیش از این گفته شد، برای حل مثالی از رهیافت تحلیلی بخش قبل، جنس لایه‌های درون پوسته را از جنس گرافن و  $TiO_2$  انتخاب می‌کنیم. لذا در ادامه برای انجام محاسبات به گذردهی الکتریکی گرافن و  $TiO_2$  نیاز داریم. برای گذردهی الکتریکی دی‌الکتریک  $TiO_2$  از مدل مبتنی بر داده‌های تجربی که در مرجع [20] آورده شده است و بازه وسیعی از طول موج شامل  $0/120 \mu m$  تا  $125 \mu m$  را پوشش می‌دهد، استفاده می‌کنیم. شکل 2 نمودار قسمت حقیقی و موهومی ضریب شکست را برای  $TiO_2$  در بازه طول موجی ذکر شده نشان می‌دهد.

$$\varepsilon_g = 1 + \frac{i\sigma}{\varepsilon_0\omega W_g} \quad (20)$$

که در آن ضخامت یک لایه گرافن است. در محاسبات ما مقدار ضخامت گرافن برابر با  $1\text{nm}$  در نظر گرفته شده است که معمولاً در مقالات نظری برای گرافن در نظر گرفته می‌شود.

### بحث و بررسی

حال که همه پیش‌نیازهای لازم برای بحث در مورد سطح مقطع پراکندگی ساختار شکل 1 فراهم شده است، در این بخش به بیان نتایج این بررسی می‌پردازیم. برای انجام این بررسی در ابتدا  $N = 2$  قرار می‌دهیم و به این معنی است که ساختار پوسته فقط شامل 2 لایه است یک لایه  $\text{TiO}_2$  و یک لایه گرافن.

شکل 3 نمودار بازده پراکندگی رابطه (19) (به معنی سطح مقطع پراکندگی در مقیاس لگاریتمی) برای مد TE در سه مقدار پتانسیل شیمیایی با در نظر گرفتن شعاع داخلی  $R_1 = 0.05\mu\text{m}$ ، دما  $T=300\text{K}$ ، زمان واهلش  $\tau = 1\text{ps}$ ،  $\varepsilon_c = 1$  و  $\varepsilon = 1$  به ازاء تغییرات طول موج و ضخامت دی‌الکتریک را نشان می‌دهد. همان‌گونه که در شکل 3 به وضوح مشاهده می‌کنید، با افزایش  $E_f$  در طول موج‌های بلند تغییرات بازده پراکندگی به وضوح قابل مشاهده است و افزایش  $E_f$  نامرئی‌سازی را (در طول موج‌های بلند) کاهش می‌دهد. علت این موضوع این است که در طول موج‌های بلند اثر تغییرات  $E_f$  قابل ملاحظه است زیرا در طول موج‌های بلند سهم  $\sigma_{inter}$  در مقایسه با  $\sigma_{intra}$  در گذردهی الکتریکی گرافن رابطه (20) قابل چشم پوشی است و تغییرات  $E_f$  در  $\sigma_{intra}$  اثر قابل توجهی دارد [21].

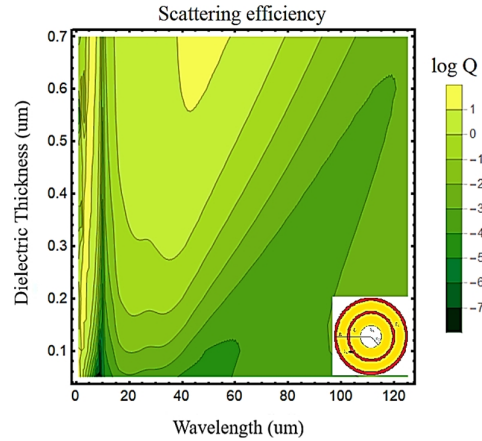
در شکل 4-الف) نمودار بازده پراکندگی برای مد TE، در حالی رسم شده است که نسبت به نمودار بازده پراکندگی شکل 3-الف)، گذردهی الکتریکی هسته  $\varepsilon_c = 10$  تغییر کرده و سایر پارامترها یکسان هستند. همان‌گونه که مشاهده می‌کنید با تغییر گذردهی الکتریکی هسته تغییرات قابل ملاحظه‌ای نسبت به حالت اولیه در شکل 3-الف) دیده نمی‌شود و به معنی این است که هسته مرکزی چه هوا و یا هر جسم دیگری باشد، در نامرئی‌سازی خلی ایجاد نمی‌کند و بنابراین پوسته نامرئی‌ساز به خوبی عمل کرده است و لذا هر جسمی که درون هسته مرکزی قرار داده شود، می‌تواند نامرئی شود. علت عدم تغییر نمودار بازده

پراکندگی در این وضعیت این است که موجی که از هوا به فراماده لایه‌ای برخورد کرده است با پراکندگی از تک تک لایه‌ها نهایتاً سطح مقطع صفر را ایجاد کرده است و بنابراین هسته که توسط لایه‌ها احاطه شده است، اثر قابل توجهی در سطح مقطع پراکندگی ندارد. شکل 4-ب) نمودار بازده پراکندگی را نشان می‌دهد که نسبت به نمودار بازده پراکندگی شکل 3-الف)، گذردهی الکتریکی محیط پیرامون  $\varepsilon = 10$  تغییر کرده است و پارامترهای دیگر مشابه پارامترهای شکل 3-الف) هستند. همان‌طور که در شکل 4-ب) می‌بینید، تغییرات گذردهی الکتریکی محیط پیرامون باعث تغییر در نمودار بازده پراکندگی نسبت به حالت اولیه در شکل 3-الف) می‌شود که این موضوع امری واضح و قابل انتظار است؛ زیرا طول موج نور در محیطی غیر خلاء متناسب با ضریب شکست محیط کاهش می‌یابد. در واقع محاسبات انجام‌شده در این مقاله برای یافتن شرط نامرئی‌شدن برای نوری که از خلاء وارد یک محیط لایه‌ای می‌شود، به دست آمده است. بنابراین ضریب شکست محیط پیرامون تأثیر بسیار مهمی در شرایط نامرئی‌سازی دارد. این موضوع در ادامه نیز در شبیه‌سازی‌های عددی با استفاده از نرم‌افزار کامسول نشان داده شده است. نوری که از یک محیط با شکل 4-ج) نمودار بازده پراکندگی را نشان می‌دهد که نسبت به نمودار بازده پراکندگی شکل 3-الف)، گذردهی الکتریکی هسته و محیط پیرامون هر دو  $\varepsilon = 10$  و  $\varepsilon_c = 10$  تغییر کرده است و سایر پارامترها یکسان هستند. شکل 4-ج) کاملاً با شکل 4-ب) یکسان است که قابل انتظار است.

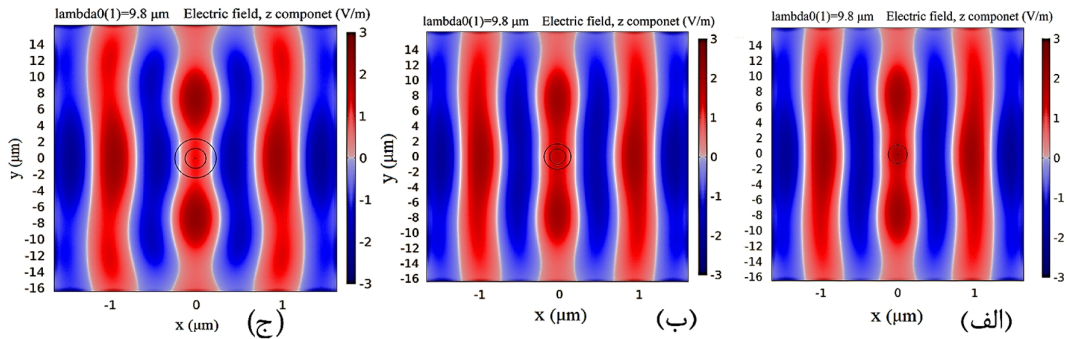
شکل 5 نمودار بازده پراکندگی را برای مد TE در سه شعاع هسته (الف)  $R_1 = 0.5\mu\text{m}$ ، (ب)  $R_1 = 1\mu\text{m}$  و (ج)  $R_1 = 1.5\mu\text{m}$  نشان می‌دهد که نسبت به شکل 3-الف)، شعاع هسته تغییر کرده است و پارامترهای دیگر ثابت هستند. در شکل مشاهده می‌کنید که هر چه قدر شعاع هسته بزرگ‌تر می‌شود، قسمت‌های تیره‌تر نمودار به ویژه در طول موج‌های بلند کم شده است. این بدین معنی است که سطح مقطع پراکندگی افزایش پیدا می‌کند و نامرئی‌سازی رو به کاهش می‌رود که این به دلیلی بزرگ شدن ساختار، کاملاً مورد انتظار است.

شبیه‌سازی الگوی پراکندگی مؤلفه Z میدان الکتریکی ساختار تحت شرایط ذکر شده را در نرم‌افزار کامسول انجام داده‌ایم. نتیجه این شبیه‌سازی در شکل 7-الف قابل مشاهده است. با توجه به مکان این نقطه در نمودار شکل 3-الف و رنگ مشکی پررنگی که این نقطه از نمودار شکل 3-الف دارد، انتظار داریم ساختار سطح مقطع پراکندگی ناچیزی از خود نشان دهد و تقریباً نامرئی باشد. شکل 7-الف دقیقاً این گفته را تأیید می‌کند. اعوجاج بسیار کم جبهه موج در عبور از ساختار تأیید کننده این ادعا است. شکل‌های 7-ب و 7-ج نیز مشابه شکل 7-الف هستند با این تفاوت که در شکل قسمت ب شعاع هسته دو برابر شده است؛ بدین معنی که نقطه مورد نظر از نمودار شکل 5-ب انتخاب و در شکل قسمت ج تعداد لایه‌ها دوبرابر شده است. این بدین معنی است که نقطه مورد نظر از نمودار شکل 6 انتخاب شده است. همان طور که شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهند، با افزایش اندازه ساختار در هر مرحله نامرئی‌سازی رو به کاهش می‌رود.

در شکل 8 شبیه‌سازی الگوی پراکندگی مؤلفه Z میدان الکتریکی یک موج تخت TE در برخورد به استوانه شکل 1 را در حالتی نشان می‌دهد که گذردهی محیط پیرامون برابر



شکل 6. نمودار بازده پراکندگی  $\ln Q$  برای ساختار شکل 1 تحت تابش موج تخت TE در حالتی که تعداد لایه‌ها دو برابر شکل 6 نمودار بازده پراکندگی برای مد TE در حالتی 3-الف، تعداد لایه‌ها دو برابر شده است ( $N = 4$ ) و پارامترهای دیگر مشابه پارامترهای شکل 3-الف هستند. همان طور که در شکل 6-الف مشاهده می‌کنید، افزایش تعداد لایه‌ها در طول موج‌های بلند باعث افزایش سطح مقطع پراکندگی می‌شود و نامرئی‌سازی کاهش می‌یابد.



شکل 7. شبیه‌سازی الگوی پراکندگی مؤلفه Z میدان الکتریکی استوانه ساختار شکل 1 در حالت الف)  $\lambda = 9.8 \mu\text{m}$  و  $W_d = 1.17 \mu\text{m}$  (ب)  $R_1 = 1 \mu\text{m}$  (ج)  $N = 2$ . در هر حالت پارامترهای بیان نشده مشابه پارامترهای شکل 3-الف هستند.

$\epsilon = 10$  انتخاب شده است. این بدین معنی است که نقطه مورد نظر از شکل 4-ب انتخاب شده است. با وجود اینکه طول موج خلاء تابشی به ساختار مشابه شکل 7 انتخاب شده است اما به وضوح در شکل مشخص است که طول موج متفاوت است. زیرا اندازه طول موج در محیط پیرامون به صورت معکوس با ضریب شکست کاهش می‌یابد. همین موضوع باعث می‌شود نامرئی‌سازی به ضریب شکست محیط پیرامون وابستگی زیادی داشته باشد که پیش از این در مورد آن بحث شد.

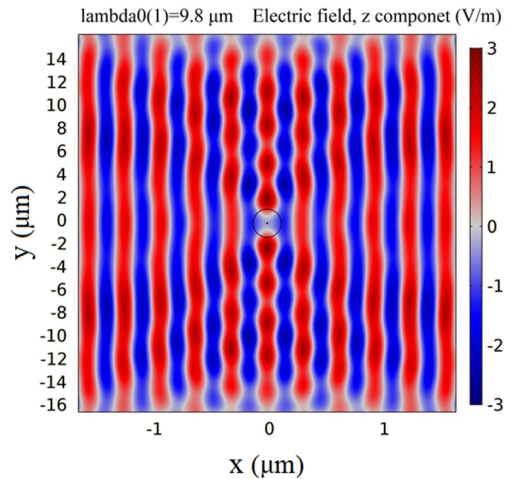
علت این موضوع نیز بزرگ‌تر شدن اندازه کلی ساختار است. این نتیجه نشان می‌دهد که برای بهبود نامرئی‌سازی نیازی به افزایش تعداد لایه‌ها نداریم.

در ادامه برای بررسی صحت برخی محاسبات انجام شده ساختار را در شرایط مختلف با استفاده از نرم‌افزار شبیه‌سازی کامسول تحت تابش موج تخت TE قرار می‌دهیم. شکل 7 این بررسی را در سه حالت مختلف نشان می‌دهد. یک نقطه با مشخصات  $W_d = 1.17 \mu\text{m}$  و  $\lambda = 9.8 \mu\text{m}$  از شکل 3-الف انتخاب شده است و



### بحث و نتیجه‌گیری

معادله موج برای یک ساختار فراماده لایه‌ای مورد بررسی قرار گرفت و سطح مقطع پراکندگی این ساختار در حالتی که لایه‌ها به تناوب از جنس گرافن و  $TiO_2$  باشد، محاسبه گردید. با تغییر پارامترهای مختلف از جمله پتانسیل شیمیایی گرافن، گذردهی الکتریکی هسته و محیط پیرامون، شعاع هسته و تعداد لایه‌ها اثر این تغییرات را بر شرایط نامرئی‌سازی مورد بررسی قرار دادیم. مشاهده شد که با افزایش ابعاد ساختار، نامرئی‌سازی کاهش می‌یابد. همچنین افزایش پتانسیل شیمیایی گرافن باعث کاهش نامرئی‌سازی به ویژه در طول موج‌های بلندتر می‌شود. گذردهی الکتریکی محیط پیرامون نیز می‌تواند نقش مهمی در شرایط نامرئی‌سازی ایفا کند. در نهایت با انجام شبیه‌سازی عددی در نرم‌افزار کامسول صحت برخی از نتایج مورد تأیید قرار گرفت.



شکل 8. شبیه‌سازی الگوی پراکندگی مولفه Z میدان الکتریکی استوانه ساختار شکل 1 در حالت  $\epsilon = 10$ . سایر پارامترها مشابه شکل 7 هستند. مقایسه با شکل 7- (الف) به وضوح تغییر طول موج نور در محیط پیرامون را نشان می‌دهد.

### References

- [1] J. B. Pendry, D. Schurig, and D. R. Smith, Controlling Electromagnetic Fields, Science, vol. 312, no. 5781, p. 178 (2006), doi:10.1126/science.112590.
- [2] U. Leonhardt, Optical Conformal Mapping, Science, vol. 312, no. 5781, p. 177(2006), doi: 10.1126/science.1126493.
- [3] Y. Lai, H. Chen, Z.-Q. Zhang, and C. Chan, Complementary media invisibility cloak that cloaks objects at a distance outside the cloaking shell, Phys. Rev. Lett. vol. 102, no. 9, (2009) 093901.
- [4] J. Li and J. B. Pendry, Hiding under the carpet: a new strategy for cloaking, Phys. Rev. Lett., vol. 101, no. 20, (2008) 203901.
- [5] A. Alù and N. Engheta, Achieving transparency with plasmonic and metamaterial coatings, Phys. Rev. E, vol. 72, no. 1, (2005) 016623,.
- [6] A. Alu and N. Engheta, Plasmonic and metamaterial cloaking: physical mechanisms and potentials, J.of Optics A: Pure and Appl. Optics, vol. 10, no. 9, (2008) 093002,.
- [7] A. Alù and N. Engheta, Effects of size and frequency dispersion in plasmonic cloaking, Phys. Rev. E, vol. 78, no. 4, (2008) 045602.
- [8] B. Edwards, A. Alù, M. G. Silveirinha, and N. Engheta, Experimental verification of plasmonic cloaking at microwave frequencies with metamaterials, Phys. Rev. Lett., vol. 103, no. 15, (2009) 15390.
- [9] S. Joseph, Choi and J. C. Howell, Paraxial ray optics cloaking, Opt. Express 22, (2014) 29465-29478
- [10] H. Chen, B.-I. Wu, B. Zhang, and J. A. Kong, Electromagnetic wave interactions with a metamaterial cloak, Phys. Rev. Lett., vol. 99, no. 6, (2007) 063903.
- [11] K.-H. Kim, Y.-S. No, S. Chang, J.-H. Choi, and H.-G. Park, Invisible hyperbolic metamaterial nanotube at visible frequency, Sci. Rep., vol. 5, no. 1, (2015) 1-9.
- [12] M. Naserpour and C. J. Zapata-Rodríguez, Tunable scattering cancellation of light using anisotropic cylindrical cavities, Plasmonics, vol. 12, no. 3, (2017) 675-683.

- [13] C. Díaz-Aviñó, M. Naserpour, and C. J. Zapata-Rodríguez, "Correction to: Tunable Scattering Cancellation of Light Using Anisotropic Cylindrical Cavities," *Plasmonics*, vol. 13, no. 6, (2018) 242435-35.
- [14] M. R. Forouzeshfard, M. Mohebbi, and A. Mollaei, Scattering cross section in a cylindrical anisotropic layered metamaterial, *Opt. Commun.*, vol. 407, (2018) 193-198.
- [15] R. Emadi, R. Safian, and A. Z. Nezhad, Plasmonic cloaking for irregular inclusions using an epsilon-near-zero region composed of a graphene-silica stack. *JOSAB*, 35(3), (2018) 643-651.
- [16] C. Díaz-Aviñó, M. Naserpour, and C. J. Zapata-Rodríguez, Optimization of multilayered nanotubes for maximal scattering cancellation, *Opt. express*, vol. 24, no. 16, (2016)18184-18196,.
- [17] A. Rezaei, F. Mohajeri, and Z. Hamzavi-Zarghani, Using plasmonic cloaking method on infinite cylindrical structures and its applications. *J Comput Electron*, 20(6), (2021) 2522-2529.
- [18] J. D. Jackson. (1999) "Classical electrodynamics," ed: American Association of Physics Teachers.
- [19] C. F. Bohren and D. R. Huffman. (2008). Absorption and scattering of light by small particles. John Wiley & Sons, (2008).
- [20] T. Siefke et al. (2016). Materials pushing the application limits of wire grid polarizers further into the deep ultraviolet spectral range, *Adv. Optical Mat.*, vol. 4, no. 11, (2016) 1780-1786,.
- [21] L. Falkovsky. (2008). Optical properties of graphene, in *J. of Phys.: conference series*, (2008), vol. 129, no. 1: IOP Publishing, p. 012004.
- [22] P. Karimi Khuzani, A. Khavasi. (2017). Analytical Calculation of Dispersion Diagram of 1D Graphene-Based Periodic Structures, *J. of appl. Electromag.*, vol. 3, no. 4, (2017) 39-46, (In Persian)