

ORIGINAL ARTICLE

Fill-Fraction-Based Sensitivity and Stability Analysis of Effective Parameters in Layered Metamaterials

Mohammad Mehdi Sadeghi*

1 Assistant Professor, Physics
Department, Jahrom University,
Jahrom, Iran.

Correspondence

Mohammad Mehdi Sadeghi
Email: sadeghi@jahromu.ac.ir

EXTENDED ABSTRACT

Introduction: Subwavelength layered metamaterials constitute one of the simplest platforms for engineering anisotropic electromagnetic responses. When the individual layer thicknesses are much smaller than the operating wavelength, the multilayer system can be represented by an effective anisotropic medium whose macroscopic parameters depend on the electromagnetic properties and relative fractions of its constituents (Rytov, 1956; Yeh, 1988). Such effective-medium descriptions are widely employed in metamaterial and near-zero-index structures (Smith and Pendry, 2006).

In practical fabrication, however, deviations in layer thickness inevitably modify the intended fill fraction and consequently alter the effective electromagnetic response. This issue is particularly important near critical conditions such as epsilon-near-zero (ENZ) states, where comparatively small structural variations may produce large relative changes in the designed parameters (Alù et al., 2007; Maas et al., 2013). The present study therefore develops an analytical framework for quantifying the sensitivity of effective permittivity, refractive index, and impedance to fill-fraction variations and for determining the allowable fabrication range associated with a prescribed electromagnetic tolerance.

Methodology: A periodic two-component layered metamaterial is considered, with constituent permittivities ϵ_1 and ϵ_2 and corresponding layer thicknesses d_1 and d_2 . The structural period is

$$\Lambda = d_1 + d_2$$

and the fill fraction of the first constituent is defined as

$$f = \frac{d_1}{\Lambda}$$

Within the subwavelength effective-medium approximation, the effective permittivities parallel and perpendicular to the layers are

$$\epsilon_{\parallel}(f) = f\epsilon_1 + (1-f)\epsilon_2$$

$$\epsilon_{\perp}(f) = \left(\frac{f}{\epsilon_1} + \frac{1-f}{\epsilon_2} \right)^{-1}$$

To describe fabrication errors, a small perturbation in the fill fraction is introduced as

$$f \rightarrow f + \Delta f, \quad |\Delta f| \ll 1$$

For a generic effective electromagnetic parameter $P(f)$, its first-order variation is

$$\Delta P \simeq \frac{dP}{df} \Delta f$$

The derivative dP/df characterizes the absolute sensitivity, while the normalized relative sensitivity is defined by

How to cite

Sadeghi, M.M. (2026). Fill-Fraction-Based Sensitivity and Stability Analysis of Effective Parameters in Layered Metamaterials, Optoelectronic, 8(4), 61-74.

$$S_r(f) = \frac{1}{P(f)} \frac{dP(f)}{df}$$

Accordingly,

$$\frac{\Delta P}{P} \simeq S_r(f) \Delta f$$

If the admissible relative deviation of the effective parameter is limited to a prescribed value η ,

$$\left| \frac{\Delta P}{P} \right| \leq \eta$$

the allowable fill-fraction deviation becomes

$$|\Delta f| \leq \frac{\eta}{|S_r(f)|}$$

This relation provides the basic analytical stability criterion used throughout the study.

Results and Discussion: For the effective permittivity parallel to the layers, differentiation yields

$$\frac{d\varepsilon_{\parallel}}{df} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$

The absolute sensitivity is therefore finite and determined directly by the permittivity contrast between the constituent materials. However, the corresponding relative sensitivity is

$$S_{r,\parallel}(f) = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{f\varepsilon_1 + (1-f)\varepsilon_2}$$

A critical condition occurs when the effective parallel permittivity approaches zero. The corresponding ENZ fill fraction satisfies

$$\varepsilon_{\parallel}(f_0) = 0$$

which gives

$$f_0 = \frac{-\varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}$$

Near this point,

$$\varepsilon_{\parallel}(f) \simeq (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(f - f_0)$$

and the relative sensitivity therefore behaves as

$$S_{r,\parallel}(f) \simeq \frac{1}{f - f_0}$$

This result demonstrates an important distinction between absolute and relative sensitivity. Although $d\varepsilon_{\parallel}/df$ remains finite, the relative sensitivity can become extremely large as the nominal effective permittivity approaches zero. Thus, even a small fabrication-induced variation in fill fraction may correspond to a substantial fractional change in the intended response.

For the perpendicular effective permittivity, the dependence on fill fraction is nonlinear. Introducing

$$g(f) = \frac{f}{\varepsilon_1} + \frac{1-f}{\varepsilon_2}$$

where

$$\varepsilon_{\perp} = \frac{1}{g(f)}$$

Allows the derivative and normalized sensitivity to be obtained analytically. The resulting expressions similarly identify critical regions in which small variations of f are strongly amplified in the effective response.

The same derivative-based procedure is applicable to the effective refractive index and impedance. Consequently, the effect of fill-fraction errors is not restricted to the permittivity tensor itself but can also propagate to other macroscopic electromagnetic quantities derived from it.

The practical consequence follows directly from

$$|\Delta f| \leq \frac{\eta}{|S_r(f)|}$$

When $|S_r|$ is small, a relatively broad range of fill fractions can satisfy a prescribed performance tolerance. In contrast, as the normalized sensitivity

increases, the allowable fabrication interval becomes progressively narrower. Hence, operation close to ENZ or other critical effective-parameter conditions can provide desirable electromagnetic functionality while simultaneously demanding higher fabrication accuracy.

The analytical formulation therefore provides a direct means of comparing stable and sensitive operating regions without repeated numerical optimization. It also clarifies the role of material contrast: changing the constituent permittivities alters both the locations of critical fill fractions and the magnitude of the associated sensitivity functions.

The framework is subject to the usual limitations of effective-medium theory. It is most appropriate when the layer thicknesses are deeply subwavelength. Outside this regime, finite-period effects, spatial dispersion, material loss, and interface imperfections may influence the quantitative response. Nevertheless, within the homogenization limit, the method provides a transparent analytical estimate of fabrication robustness.

Conclusions: An analytical sensitivity and stability framework has been developed for two-component layered metamaterials in which the fill fraction serves as the principal structural control parameter. By differentiating the effective-medium relations, both absolute and relative sensitivities of the effective electromagnetic parameters can be determined directly.

The analysis shows that relative sensitivity can increase dramatically near ENZ and related critical conditions even when the absolute derivative remains finite. In particular, near the zero of the parallel effective permittivity, the normalized sensitivity varies approximately as

$$|S_r| \sim \frac{1}{|f - f_0|}$$

The resulting stability relation,

$$|\Delta f| \leq \frac{\eta}{|S_r(f)|}$$

provides a direct connection between a prescribed electromagnetic tolerance and the maximum permissible deviation in fill fraction. The proposed framework can therefore be used to identify robust operating regions, compare material combinations, and estimate fabrication tolerances without iterative optimization. Within the validity range of effective-medium theory, it offers a simple analytical tool for balancing desired electromagnetic functionality against structural sensitivity in layered metamaterial designs.

Conflict of Interest: The authors declare that there are no conflicts of interest regarding the publication of this manuscript.

References

- [1] Rytov, S. M. (1956). Electromagnetic properties of a finely stratified medium. *Soviet Physics JETP*, 2, 466–475.
- [2] Yeh, P. (1988). *Optical Waves in Layered Media*. Wiley.
- [3] Smith, D. R., & Pendry, J. B. (2006). Homogenization of metamaterials by field averaging. *Journal of the Optical Society of America B*, 23(3), 391–403.
- [4] Silveirinha, M. G. (2007). A metamaterial homogenization approach with application to the characterization of microstructured composites with negative parameters. *Physical Review B*, 75, 115104.
- [5] Alù, A., Silveirinha, M. G., Salandrino, A., & Engheta, N. (2007). Epsilon-near-zero metamaterials and electromagnetic sources: Tailoring the radiation phase pattern. *Physical Review B*, 75, 155410.
- [6] Maas, R., Parsons, J., Engheta, N., & Polman, A. (2013). Experimental realization of an epsilon-near-zero metamaterial at visible wavelengths. *Nature Photonics*, 7, 907–912.
- [7] Poddubny, A., Iorsh, I., Belov, P., & Kivshar, Y. (2013). Hyperbolic metamaterials. *Nature Photonics*, 7, 948–957.
- [8] Macleod, H. A. (2010). *Thin-Film Optical Filters* (4th ed.). CRC Press.

ABSTRACT

Subwavelength layered metamaterials are widely used platforms for engineering effective electromagnetic responses. In such structures, the effective permittivity along the directions parallel and perpendicular to the layers can be controlled by adjusting the fill fraction, enabling the tuning of the effective refractive index and impedance. Classical effective-medium relations for these systems are well established, the derivative behavior of these relations and the quantitative sensitivity of effective parameters to small variations in fill fraction have not been systematically addressed.

In practical fabrication, unavoidable deviations in layer thickness directly translate into fill-fraction variations; the stability of the effective response depends on its functional dependence on this parameter. Within the subwavelength effective-medium regime, we derive analytical expressions for the derivatives of the effective permittivity with respect to fill fraction and extend the analysis to the refractive index and impedance. The results show that in certain parametric regions, particularly near the epsilon-near-zero condition, the effective response can become highly sensitive to small fill-fraction changes.

The main contribution of this work is a quantitative analytical formulation for estimating the allowable variation range of the fill fraction based on the permittivity contrast of the constituent materials. This framework enables the prediction of design stability without numerical optimization and provides a practical analytical tool for selecting suitable fill-fraction ranges and material contrasts in layered metamaterial design.

KEYWORDS

Layered Metamaterials, Effective Medium Theory, Fill Fraction, Effective-Parameter Sensitivity, Anisotropy, Epsilon-Near-Zero.

فصلنامه علمی
اپتوالکترونیک

«مقاله پژوهشی»

تحلیل حساسیت و پایداری پارامترهای مؤثر در فرامواد لایه‌ای بر پایه کسر پرشدگی

محمد مهدی صادقی *

۱ استادیار، گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه
چهرم، چهرم، ایران.

نویسنده مسئول:

محمد مهدی صادقی

رایانامه: sadeghi@jahromu.ac.ir

چکیده

فرامواد لایه‌ای زیر حد طول موج یکی از متداول‌ترین بسترهای مؤثر برای مهندسی پاسخ الکترومغناطیسی به شمار می‌آیند. در این ساختارها، با تنظیم کسر پرشدگی، می‌توان گذردهی مؤثر در راستاهای موازی و عمود بر لایه‌ها را کنترل کرد و از این طریق ضریب شکست و امپدانس محیط را تنظیم نمود. روابط کلاسیک محیط مؤثر برای چنین سامانه‌هایی در منابع متعدد ارائه شده‌اند؛ با این حال رفتار مشتقی این روابط و میزان حساسیت پارامترهای مؤثر نسبت به تغییرات کوچک کسر پرشدگی کمتر به صورت صریح و کمی تحلیل شده است. از آنجا که در فرآیند ساخت عملی، تغییرات ناگزیر در ضخامت لایه‌ها مستقیماً به تغییر در کسر پرشدگی منجر می‌شود، پایداری پاسخ مؤثر به نحوه وابستگی آن به این پارامتر بستگی دارد. در این مقاله، با استفاده از مدل محیط مؤثر در رژیم زیر حد طول موج، مشتقات تحلیلی گذردهی مؤثر نسبت به کسر پرشدگی استخراج می‌شود و این نتایج به حساسیت ضریب شکست و امپدانس تعمیم داده می‌شود. تحلیل انجام‌شده نشان می‌دهد که در برخی نواحی پارامتری، به‌ویژه در همسایگی شرایط گذردهی نزدیک صفر، پاسخ مؤثر می‌تواند نسبت به تغییرات کوچک کسر پرشدگی بسیار حساس شود. نوآوری این کار در ارائه یک صورت‌بندی تحلیلی کمی برای برآورد دامنه تغییر مجاز کسر پرشدگی بر اساس اختلاف گذردهی مواد سازنده است؛ به‌گونه‌ای که امکان پیش‌بینی پایداری طراحی بدون اتکا به بهینه‌سازی عددی فراهم می‌شود. چارچوب ارائه‌شده می‌تواند به‌عنوان ابزاری تحلیلی برای انتخاب بازه‌های مناسب کسر پرشدگی و اختلاف گذردهی مواد در طراحی فرامواد لایه‌ای استفاده شود.

واژه‌های کلیدی

فرامواد لایه‌ای، محیط مؤثر، کسر پرشدگی، حساسیت پارامتر مؤثر، ناهمسانگردی، گذردهی نزدیک صفر.

استناد به این مقاله:

محمد مهدی صادقی (۱۴۰۵). تحلیل حساسیت و پایداری پارامترهای مؤثر در فرامواد لایه‌ای بر پایه کسر پرشدگی. فصلنامه علمی اپتوالکترونیک، ۸(۴)، ۶۱-۷۴.

مقدمه

فرامواد لایه‌ای زیر حد طول موج یکی از ساده‌ترین و در عین حال پرکاربردترین ساختارهای مؤثر برای مهندسی پاسخ الکترومغناطیسی هستند [۱-۴]. در این معماری، با تکرار متناوب دو ماده و انتخاب تناوبی که به‌طور معنادار کوچک‌تر از طول موج باشد، موج ورودی قادر به تفکیک ساختار ریزلایه‌ای نیست و محیط به‌صورت یک ماده همگن مؤثر رفتار می‌کند [۱ و ۲ و ۵ و ۶]. در این تقریب، گذردهی مؤثر در راستای موازی با لایه‌ها به‌صورت میانگین و در راستای عمود بر لایه‌ها به‌صورت میانگین هارمونیک توصیف می‌شود و در نتیجه محیط به‌طور طبیعی ناهمسان‌گرد خواهد بود [۱-۷ و ۴]. در بسیاری از کاربردها، از طراحی ساختارهای گرادیانی گرفته تا تحقق شرایط گذردهی نزدیک صفر، کسر پرشدگی لایه‌ها پارامتر اصلی برای تنظیم پاسخ اپتیکی است [۸-۱۵]. با تغییر نسبت ضخامت دو ماده، می‌توان مقدار گذردهی مؤثر و به تبع آن ضریب شکست و امپدانس را کنترل کرد [۱-۸ و ۴ و ۱۵]. این سادگی تنظیم، یکی از دلایل اصلی استفاده گسترده از ساختارهای لایه‌ای در طراحی‌های اپتیکی و میکروویوی است [۲ و ۸ و ۱۵]. با وجود آن‌که روابط کلاسیک محیط مؤثر برای چنین سامانه‌هایی به‌خوبی شناخته شده‌اند، وابستگی مشتقی این روابط نسبت به کسر پرشدگی کمتر به‌صورت تحلیلی و نظام‌مند مورد توجه قرار گرفته است [۱-۷]. در حالی‌که از دیدگاه عملی، پرسش اصلی تنها این نیست که برای یک مقدار مشخص از کسر پرشدگی چه پارامتر مؤثری حاصل می‌شود؛ بلکه این است که پاسخ مؤثر تا چه اندازه نسبت به تغییرات کوچک این پارامتر حساس است [۱۶-۱۹]. این مسئله مستقیماً با پایداری طراحی در برابر خطاهای ساخت مرتبط است [۱۶-۱۹]. در فرآیندهای ساخت واقعی، کنترل دقیق ضخامت هر لایه همواره با محدودیت همراه است [۱۶-۱۹]. هرگونه انحراف در ضخامت لایه‌ها مستقیماً به تغییر در کسر پرشدگی منجر می‌شود و بنابراین پارامترهای مؤثر طراحی شده را جابه‌جا می‌کند [۱۶-۱۹]. اگر وابستگی پارامترهای مؤثر به کسر پرشدگی ملایم باشد، طراحی از پایداری نسبی برخوردار است [۱۶-۱۹]. اما اگر این وابستگی در برخی نواحی پارامتری تند و غیرخطی باشد؛ حتی تغییرات کوچک در کسر پرشدگی می‌تواند به تغییرات بزرگ در گذردهی یا ضریب شکست منجر شود و عملکرد مورد انتظار را مختل کند [۱۰ و ۱۶-۱۹]. این موضوع به‌ویژه در همسایگی شرایط گذردهی نزدیک صفر اهمیت بیشتری پیدا می‌کند [۱۱-۱۴]. در این ناحیه، روابط محیط مؤثر می‌توانند رفتار غیرخطی‌تری نشان دهند و حساسیت پاسخ نسبت به کسر

پرشدگی افزایش یابد [۱۱-۱۴]. بنابراین شناسایی نواحی‌ای که در آن‌ها پاسخ مؤثر نسبت به تغییرات کسر پرشدگی تقویت می‌شود، برای ارزیابی پایداری طراحی ضروری است [۱۱-۱۴ و ۱۶-۱۹].

در این مقاله، با تکیه بر مدل محیط مؤثر در رژیم زیر حد طول موج، وابستگی تحلیلی گذردهی مؤثر به کسر پرشدگی بررسی می‌شود و مشتقات صریح این روابط استخراج می‌گردد [۱-۷]. سپس این نتایج به حساسیت ضریب شکست و امپدانس تعمیم داده می‌شود تا تأثیر تغییرات کوچک کسر پرشدگی به‌صورت کمی بیان شود [۱-۷]. هدف این کار ارائه یک چارچوب تحلیلی ساده برای برآورد دامنه تغییر مجاز کسر پرشدگی بر اساس اختلاف گذردهی مواد سازنده است، به‌گونه‌ای که امکان ارزیابی پایداری طراحی بدون اتکا به محاسبات عددی سنگین فراهم گردد [۱-۷ و ۱۶-۱۹].

در ادامه، ابتدا مدل محیط مؤثر و فروض اعتبار آن معرفی می‌شود [۱-۷]. سپس روابط مشتقی نسبت به کسر پرشدگی استخراج و تحلیل می‌گردد [۱-۷]. در پایان، بر اساس نتایج به‌دست‌آمده، معیارهایی برای انتخاب بازه مناسب کسر پرشدگی ارائه می‌شود تا طراحی از نظر پایداری در برابر خطای ساخت در وضعیت مطلوب‌تری قرار گیرد [۱۶-۱۹].

چارچوب تحلیلی کسر پرشدگی در فرامواد لایه‌ای

۱. روابط محیط مؤثر برای ساختار لایه‌ای زیر حد طول موج

یک ساختار لایه‌ای متناوب شامل دو ماده همگن با گذردهی‌های الکتریکی ϵ_1 و ϵ_2 در نظر گرفته می‌شود. ضخامت لایه‌ها به‌ترتیب d_1 و d_2 و دوره تناوب برابر است با

$$\Lambda = d_1 + d_2 \quad (1)$$

کسر پرشدگی ماده اول به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f = \frac{d_1}{\Lambda} \quad (2)$$

در حد زیرطول موج، یعنی زمانی که $\Lambda \ll \lambda$ ، ساختار لایه‌ای را می‌توان به‌صورت یک محیط مؤثر ناهمسان‌گرد توصیف کرد. در این حالت، گذردهی مؤثر در راستای موازی با لایه‌ها برابر است با

$$\epsilon_{\parallel}(f) = f\epsilon_1 + (1-f)\epsilon_2 \quad (3)$$

و گذردهی مؤثر در راستای عمود بر لایه‌ها به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\epsilon_{\perp}(f) = \left(\frac{f}{\epsilon_1} + \frac{1-f}{\epsilon_2} \right)^{-1} \quad (4)$$

روابط (۳) و (۴) مبنای تحلیل حساسیت در ادامه خواهند بود.

کوچک‌تر می‌شود و ساختار نسبت به خطاهای ساخت حساس‌تر خواهد بود.

تحلیل حساسیت برای مؤلفه‌های موازی و عمود

در این بخش، با استفاده از روابط محیط مؤثر ارائه شده در بخش قبل، حساسیت مطلق و نسبی دو مؤلفه گذردهی مؤثر نسبت به کسر پرشدگی محاسبه می‌شود.

۱. حساسیت در راستای موازی با لایه‌ها

با استفاده از رابطه (۳)، گذردهی مؤثر در راستای موازی با لایه‌ها را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\varepsilon_{\parallel}(f) = \varepsilon_r + f(\varepsilon_1 - \varepsilon_r) \quad (14)$$

۱-۱. حساسیت مطلق

مشتق رابطه (۱۴) نسبت به f برابر است با

$$\frac{d\varepsilon_{\parallel}}{df} = \varepsilon_1 - \varepsilon_r \quad (15)$$

بنابراین حساسیت مطلق مؤلفه موازی مستقل از کسر پرشدگی است و فقط به اختلاف گذردهی دو ماده بستگی دارد.

۲-۱. حساسیت نسبی

با استفاده از تعریف حساسیت نسبی در رابطه (۹)، برای مؤلفه موازی داریم:

$$S_{r,\parallel}(f) = \frac{1}{\varepsilon_{\parallel}} \frac{d\varepsilon_{\parallel}}{df} \quad (16)$$

با جای گذاری رابطه (۱۴) در رابطه (۱۶)، نتیجه می‌شود:

$$S_{r,\parallel}(f) = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_r}{f\varepsilon_1 + (1-f)\varepsilon_r} \quad (17)$$

رابطه (۱۷) نشان می‌دهد که اگرچه حساسیت مطلق مؤلفه موازی ثابت است، حساسیت نسبی آن به مقدار خودگذردهی مؤثر بستگی دارد. بنابراین هرگاه مخرج رابطه (۱۷) کوچک شود، حساسیت نسبی افزایش می‌یابد.

۲. حساسیت گذردهی مؤثر در راستای عمود بر لایه‌ها

برای مؤلفه عمود، به منظور ساده‌سازی مشتق‌گیری، رابطه (۴) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$A(f) = \frac{f}{\varepsilon_1} + \frac{1-f}{\varepsilon_2}, \quad \varepsilon_{\perp}(f) = A^{-1}(f) \quad (18)$$

۱-۲. حساسیت مطلق

با مشتق‌گیری از رابطه (۱۸) نسبت به f ، داریم:

$$\frac{d\varepsilon_{\perp}}{df} = -\frac{1}{A^2} \frac{dA}{df} \quad (19)$$

از طرف دیگر،

$$\frac{dA}{df} = \frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2} \quad (20)$$

بنابراین:

$$\frac{d\varepsilon_{\perp}}{df} = -\frac{1}{A^2} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2} \right) \quad (21)$$

از آنجا که $\varepsilon_{\perp} = A^{-1}$ ، داریم $A^{-2} = \varepsilon_{\perp}^2$. پس:

۲. تعریف تغییرات کوچک در کسر پرشدگی

برای بررسی اثر خطاهای ساخت، تغییر کوچک در کسر پرشدگی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$f \rightarrow f + \Delta f \quad (5)$$

که در آن $|\Delta f| \ll 1$. در نتیجه پارامتر مؤثر کلی $\varepsilon_{\text{eff}}(f)$ نیز تغییر می‌کند:

$$\varepsilon_{\text{eff}}(f + \Delta f) = \varepsilon_{\text{eff}}(f) + \Delta \varepsilon_{\text{eff}} \quad (6)$$

با بسط تیلور تا مرتبه اول داریم:

$$\Delta \varepsilon_{\text{eff}} = \frac{d\varepsilon_{\text{eff}}}{df} \Delta f + \mathcal{O}(\Delta f^2) \quad (7)$$

در ادامه، تنها جمله مرتبه اول در نظر گرفته می‌شود.

۳. تعریف حساسیت مطلق و نسبی

برای توصیف وابستگی پارامتر مؤثر به کسر پرشدگی، دو نوع حساسیت تعریف می‌شود:

۱-۳. حساسیت مطلق

حساسیت مطلق به صورت مشتق پارامتر مؤثر نسبت به کسر پرشدگی تعریف می‌شود:

$$S_a(f) = \frac{d\varepsilon_{\text{eff}}}{df} \quad (8)$$

این کمیت نشان می‌دهد که تغییر کوچک در f چه مقدار تغییر مستقیم در ε_{eff} ایجاد می‌کند.

۲-۳. حساسیت نسبی

در طراحی عملی، تغییر نسبی پارامتر مؤثر اهمیت بیشتری دارد. بنابراین حساسیت نسبی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S_r(f) = \frac{1}{\varepsilon_{\text{eff}}} \frac{d\varepsilon_{\text{eff}}}{df} \quad (9)$$

با استفاده از روابط (۷) و (۹)، تغییر نسبی پارامتر مؤثر به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\Delta \varepsilon_{\text{eff}}}{\varepsilon_{\text{eff}}} = S_r(f) \Delta f \quad (10)$$

این رابطه نشان می‌دهد که تغییر نسبی پارامتر مؤثر متناسب با حساسیت نسبی و تغییر کسر پرشدگی است.

۴. معیار پایداری طراحی

فرض می‌شود که بیشینه مجاز تغییر نسبی پارامتر مؤثر برابر η باشد. در این صورت شرط طراحی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\left| \frac{\Delta \varepsilon_{\text{eff}}}{\varepsilon_{\text{eff}}} \right| \leq \eta \quad (11)$$

با جای گذاری رابطه (۱۰) در رابطه (۱۱) داریم:

$$|S_r(f)| |\Delta f| \leq \eta \quad (12)$$

در نتیجه، دامنه تغییر مجاز کسر پرشدگی برابر است با

$$|\Delta f| \leq \frac{\eta}{|S_r(f)|} \quad (13)$$

رابطه (۱۳) معیار اصلی پایداری طراحی در این مقاله است.

هرچه مقدار $|S_r(f)|$ بزرگ‌تر باشد، مقدار مجاز $|\Delta f|$

رفتار نزدیک صفر و نواحی با حساسیت بالا

در این بخش، رفتار حساسیت نسبی در نواحی‌ای بررسی می‌شود که گذردهی مؤثر به مقدار صفر نزدیک می‌شود یا رابطه مؤثر دچار رفتار تکین می‌گردد. هدف این بخش، تکرار روابط محیط مؤثر یا تعریف حساسیت نیست؛ بلکه تحلیل پیامدهای روابط به‌دست‌آمده در بخش ۳ برای نواحی حساس طراحی است.

۱. رفتار نزدیک صفر در مؤلفه موازی

برای مؤلفه موازی، شرط نزدیک صفر شدن گذردهی مؤثر به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\varepsilon_{\parallel}(f_0) = 0 \quad (25)$$

با استفاده از رابطه (۱۴)، داریم:

$$\varepsilon_2 + f_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = 0 \quad (26)$$

در نتیجه، مقدار کسر پرشدگی متناظر با گذردهی صفر برابر است با:

$$f_0 = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \quad (27)$$

این مقدار تنها زمانی از نظر فیزیکی قابل دسترس است که در بازه

$$0 < f_0 < 1 \quad (28)$$

قرار گیرد. بنابراین وقوع حالت نزدیک صفر در مؤلفه موازی نیازمند آن است که دو ماده دارای گذردهی‌هایی با علامت مخالف باشند. اکنون اگر کسر پرشدگی در نزدیکی این مقدار قرار گیرد، می‌توان نوشت:

$$f = f_0 + \delta f, |\delta f| \ll 1 \quad (29)$$

با استفاده از رابطه (۱۴)، در نزدیکی f_0 داریم:

$$\varepsilon_{\parallel}(f_0 + \delta f) = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\delta f \quad (30)$$

از طرف دیگر، حساسیت نسبی مؤلفه موازی در رابطه (۱۷)

به‌دست آمد. بنابراین در نزدیکی f_0 نتیجه می‌شود:

$$S_{r,\parallel}(f_0 + \delta f) = \frac{1}{\delta f} \quad (31)$$

یا به‌صورت معادل:

$$S_{r,\parallel}(f) \sim \frac{1}{f - f_0} \quad (32)$$

این رابطه نشان می‌دهد که با نزدیک شدن کسر پرشدگی به مقدار f_0 ، حساسیت نسبی مؤلفه موازی به‌شدت افزایش می‌یابد. در نتیجه، ناحیه نزدیک به گذردهی صفر از نظر تنظیم پاسخ مؤثر جذاب است؛ اما از نظر پایداری ساخت نسبت به خطاهای کوچک در کسر پرشدگی بسیار حساس خواهد بود.

۲. رفتار تکین در مؤلفه عمود

برای مؤلفه عمود، گذردهی مؤثر بر اساس میانگین هارمونیک

$$\frac{d\varepsilon_{\perp}}{df} = -\varepsilon_{\perp}^2 \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2} \right) \quad (22)$$

۲-۲. حساسیت نسبی

با استفاده از تعریف رابطه (۹)، حساسیت نسبی مؤلفه عمود برابر است با:

$$S_{r,\perp}(f) = \frac{1}{\varepsilon_{\perp}} \frac{d\varepsilon_{\perp}}{df} \quad (23)$$

با جای‌گذاری رابطه (۲۲) در رابطه (۲۳)، نتیجه می‌شود:

$$S_{r,\perp}(f) = -\varepsilon_{\perp} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2} \right) \quad (24)$$

رابطه (۲۴) نشان می‌دهد که حساسیت نسبی مؤلفه عمود، برخلاف مؤلفه موازی، مستقیماً با مقدار $\varepsilon_{\perp}$ متناسب است. بنابراین اگر مقدار مؤثر عمود بزرگ شود، حساسیت نسبی نیز افزایش می‌یابد.

۲-۳. تحلیل رفتار تابعی

برای بررسی رفتار تابعی در راستای عمود بر لایه‌ها، گذردهی مؤثر از معکوس میانگین هارمونیک دو گذردهی تشکیل می‌شود. با استفاده از رابطه (۱۸)، $\varepsilon_{\perp}^{\text{eff}}(f) = \frac{1}{A(f)}$ خواهد بود؛ بنابراین رفتار این مؤلفه نه‌تنها به مقدار ε_1 و ε_2 ؛ بلکه به کوچک شدن مخرج $A(f)$ نیز وابسته است. هرگاه $A(f)$ به صفر نزدیک شود، $\varepsilon_{\perp}^{\text{eff}}$ و حساسیت متناظر می‌توانند به‌شدت افزایش یابند.

در مدل ایده‌آل با گذردهی‌های حقیقی، متناهی و هم‌علامت، دو جمله f/ε_1 و $(1-f)/\varepsilon_2$ هم‌علامت‌اند و بنابراین $A(f)$ در بازه $0 < f < 1$ صفر نمی‌شود. در نتیجه، واگرایی واقعی مؤلفه عمود در این حالت رخ نمی‌دهد. اما اگر گذردهی‌های دو ماده ناهم‌علامت باشند، امکان صفر شدن $A(f)$ وجود دارد و در آن صورت $\varepsilon_{\perp}^{\text{eff}}$ واگرا می‌شود. این تفاوت، منشأ اصلی حساسیت شدیدتر مؤلفه عمود در نزدیکی نقاط بحرانی است.

۳. مقایسه رفتار دو مؤلفه

نتایج روابط (۱۷) و (۲۴) نشان می‌دهند که دو مؤلفه گذردهی مؤثر رفتار حساسیتی یکسانی ندارند. در راستای موازی با لایه‌ها، حساسیت مطلق ثابت است و حساسیت نسبی زمانی افزایش می‌یابد که مقدار $\varepsilon_{\parallel}$ کوچک شود. در راستای عمود بر لایه‌ها، به‌دلیل ساختار هارمونیک رابطه مؤثر، حساسیت نسبی با مقدار $\varepsilon_{\perp}$ کنترل می‌شود.

بنابراین در طراحی فراماده‌های لایه‌ای، پایداری ساختار تنها به اختلاف گذردهی دو ماده وابسته نیست؛ بلکه به راستای میدان نسبت به لایه‌ها و نوع میانگین‌گیری مؤثر نیز بستگی دارد. این تفاوت در بخش بعد برای بررسی نواحی نزدیک به صفر و نواحی با حساسیت بالا استفاده می‌شود.

$$| \Delta f |_{\max} \sim \eta | f - f_* | \quad (42)$$

رابطه (۴۲) بیان می‌کند که هرچه طراحی به نقطه حساس نزدیک‌تر شود، تolerانس مجاز ساخت به‌صورت خطی کاهش می‌یابد. بنابراین استفاده از نواحی نزدیک صفر یا نواحی با پاسخ بسیار بزرگ، اگرچه از نظر کنترل پارامترهای مؤثر مفید است، نیازمند دقت ساخت بالاتر و کنترل دقیق‌تر کسر پرشدگی خواهد بود.

نکته مهم آن است که منشأ ریاضی نواحی بحرانی در دو راستای موازی و عمود یکسان نیست. در راستای موازی، رابطه محیط مؤثر یک میانگین حسابی خطی است. بنابراین افزایش شدید حساسیت نسبی زمانی رخ می‌دهد که خود $\varepsilon_{\parallel}^{\text{eff}}$ به صفر نزدیک شود. از این رو برای گزیده‌های حقیقی، متناهی و هم‌علامت، چون میانگین حسابی در بازه $0 < f < 1$ صفر نمی‌شود، تکینگی واقعی در مؤلفه موازی ظاهر نمی‌گردد. در مقابل، مؤلفه عمود از معکوس میانگین هارمونیک به دست می‌آید و ناحیه بحرانی آن با کوچک شدن مخرج هارمونیک $A(f) = f/\varepsilon_1 + (1-f)/\varepsilon_2$ کنترل می‌شود، نه با صفر شدن مستقیم خود $\varepsilon_{\perp}^{\text{eff}}$. بنابراین در مؤلفه عمود، نزدیک شدن $A(f)$ به صفر می‌تواند به افزایش شدید $\varepsilon_{\perp}^{\text{eff}}$ و حساسیت نسبی متناظر منجر شود. با این حال، در مدل ایده‌آل با گزیده‌های حقیقی، متناهی و هم‌علامت، $A(f)$ نیز در بازه فیزیکی صفر نمی‌شود و واگرایی واقعی رخ نمی‌دهد. در محیط‌های ناهم‌علامت، مختلط، اتلافی یا شدیداً پاشنده، این تکینگی ایده‌آل معمولاً به قله‌ای بزرگ اما محدود در پاسخ مؤثر و حساسیت نسبی تبدیل می‌شود.

تحلیل عددی و پیامدهای طراحی

در این بخش، رفتار روابط تحلیلی به‌دست‌آمده در بخش‌های قبل برای چند نمونه عددی بررسی می‌شود. هدف، نشان دادن تفاوت میان نواحی پایدار و نواحی حساس در فضای کسر پرشدگی است. در تمام محاسبات، حساسیت نسبی مؤلفه‌های موازی و عمود به‌ترتیب از روابط (۱۷) و (۲۴) و بیشینه خطای مجاز کسر پرشدگی از معیار پایداری رابطه (۱۳) به‌دست می‌آید.

۱. سناریوی A: نمونه اول: گزیده‌های هم‌علامت

ابتدا حالتی در نظر گرفته می‌شود که هر دو ماده دارای گذردهی مثبت باشند:

$$\varepsilon_1 = 12, \varepsilon_2 = 2 \quad (34)$$

در این حالت، گذردهی مؤثر موازی و عمود در بازه $0 \leq f \leq 1$ مقادیر محدود و مثبت دارند. بنابراین هیچ نقطه صفر یا

تعیین می‌شود. بنابراین رفتار تکین زمانی رخ می‌دهد که مخرج رابطه (۴) صفر شود. این شرط را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\frac{f_{\infty}}{\varepsilon_1} + \frac{1-f_{\infty}}{\varepsilon_2} = 0 \quad (33)$$

از رابطه بالا نتیجه می‌شود:

$$f_{\infty} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \quad (34)$$

این مقدار نیز تنها زمانی از نظر فیزیکی در ساختار لایه‌ای قابل تحقق است که

$$0 < f_{\infty} < 1 \quad (35)$$

باشد. در چنین حالتی، مؤلفه عمود گذردهی مؤثر در نزدیکی f_{∞} می‌تواند به مقادیر بسیار بزرگ میل کند. برای بررسی حساسیت در این ناحیه، می‌نویسیم:

$$f = f_{\infty} + \delta f, |\delta f| \ll 1 \quad (36)$$

با تعریف $A(f)$ در رابطه (۱۸)، در نزدیکی f_{∞} داریم:

$$A(f_{\infty} + \delta f) = \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2} \right) \delta f \quad (37)$$

از آنجا که $\varepsilon_{\perp} = A^{-1}$ ، مؤلفه عمود در این ناحیه به‌صورت زیر رفتار می‌کند:

$$\varepsilon_{\perp}(f_{\infty} + \delta f) = \left[\left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2} \right) \delta f \right]^{-1} \quad (38)$$

با استفاده از رابطه حساسیت نسبی مؤلفه عمود، یعنی رابطه (۲۴)، نتیجه می‌شود:

$$S_{r,\perp}(f_{\infty} + \delta f) = -\frac{1}{\delta f} \quad (39)$$

بنابراین:

$$|S_{r,\perp}(f)| \sim \frac{1}{|f - f_{\infty}|} \quad (40)$$

این نتیجه نشان می‌دهد که در نزدیکی نقطه تکین مؤلفه عمود، خطاهای بسیار کوچک در کسر پرشدگی می‌تواند تغییرات بزرگی در پاسخ مؤثر ایجاد کنند.

۳. جمع‌بندی نتایج حدی و پیام طراحی

نتایج بخش‌های ۱-۴ و ۲-۴ نشان می‌دهند که دو نوع ناحیه حساس در فراماده‌های لایه‌ای وجود دارد:

نخست، ناحیه‌ای که در آن $\varepsilon_{\parallel}(f_0) = 0$ و حساسیت نسبی مؤلفه موازی مطابق رابطه (۳۲) واگرا می‌شود.

دوم، ناحیه‌ای که در آن مخرج رابطه هارمونیک مؤلفه عمود صفر می‌شود و حساسیت نسبی مؤلفه عمود مطابق رابطه (۴۰) افزایش شدیدی پیدا می‌کند.

در هر دو حالت، رفتار غالب حساسیت به‌صورت زیر است:

$$|S_r(f)| \sim \frac{1}{|f - f_*|} \quad (41)$$

که در آن f_* می‌تواند نشان‌دهنده f_0 یا f_{∞} باشد. بنابراین با نزدیک شدن به ناحیه صفر یا تکین، بیشینه خطای مجاز در کسر پرشدگی کاهش می‌یابد. با استفاده از معیار پایداری رابطه (۱۳)، می‌توان نوشت:

۲. سناریوی B: نمونه دوم: گذردهی‌های با علامت مخالف

در نمونه دوم، حالتی بررسی می‌شود که دو ماده دارای گذردهی‌هایی با علامت مخالف باشند:

$$\varepsilon_1 = -10, \varepsilon_2 = 2 \quad (48)$$

در این حالت، برخلاف نمونه قبل، امکان ظهور ناحیه نزدیک صفر و همچنین رفتار تکین در بازه فیزیکی کسر پرشدگی وجود دارد.

برای مؤلفه موازی، مقدار کسر پرشدگی متناظر با گذردهی صفر از رابطه (۲۷) به دست می‌آید:

$$f_0 = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} = \frac{1}{6} \approx 0.1667 \quad (49)$$

بنابراین در نزدیکی f_0 ، حساسیت نسبی مؤلفه موازی مطابق رابطه (۳۲) افزایش شدیدی پیدا می‌کند:

$$|S_{r,\parallel}(f)| \sim \frac{1}{|f - f_0|} \quad (50)$$

برای مؤلفه عمود، نقطه تکین از رابطه (۳۴) به دست می‌آید:

$$f_\infty = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} = \frac{5}{6} \approx 0.8333 \quad (51)$$

در نزدیکی این مقدار، مؤلفه عمود گذردهی مؤثر می‌تواند به مقادیر بسیار بزرگ میل کند و حساسیت نسبی آن مطابق رابطه (۴۰) رفتار زیر را نشان می‌دهد:

$$|S_{r,\perp}(f)| \sim \frac{1}{|f - f_\infty|} \quad (52)$$

در نتیجه، در نمونه دوم دو ناحیه حساس متمایز وجود دارد: یکی در نزدیکی $f_0 \approx 0.1667$ برای مؤلفه موازی و دیگری در نزدیکی $f_\infty \approx 0.8333$ برای مؤلفه عمود. در این نواحی، حتی تغییرات بسیار کوچک در کسر پرشدگی می‌توانند موجب تغییرات بزرگ در پاسخ مؤثر شوند.

با استفاده از رابطه (۱۳)، بیشینه خطای مجاز کسر پرشدگی در نزدیکی این نقاط کاهش می‌یابد. به صورت تقریبی، همان‌گونه که در رابطه (۴۲) نشان داده شد، داریم:

$$|\Delta f|_{\max} \sim \eta |f - f_*| \quad (53)$$

که در آن f_* می‌تواند نشان‌دهنده f_0 یا f_∞ باشد. شکل ۲ رفتار حساسیت نسبی و بیشینه خطای مجاز کسر پرشدگی برای نمونه نهم علامت $\varepsilon_1 = -10$ و $\varepsilon_2 = 2$ در این حالت، مؤلفه موازی در $f_0 \approx 0.1667$ به ناحیه گذردهی صفر می‌رسد، در حالی که مؤلفه عمود در $f_\infty \approx 0.8333$ رفتار تکین نشان می‌دهد. در نزدیکی هر دو مقدار، تفرانس مجاز ساخت به شدت کاهش می‌یابد.

تکین فیزیکی در بازه کسر پرشدگی ظاهر نمی‌شود.

برای مؤلفه موازی، با استفاده از رابطه (۱۷)، حساسیت نسبی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$S_{r,\parallel}(f) = \frac{1}{2+10f} \quad (44)$$

این رابطه نشان می‌دهد که حساسیت نسبی مؤلفه موازی با افزایش f کاهش می‌یابد. بنابراین ساختار در مقادیر بزرگ‌تر کسر پرشدگی نسبت به خطاهای کوچک ساخت پایدارتر می‌شود.

برای مؤلفه عمود، با استفاده از رابطه (۲۴)، حساسیت نسبی برابر است با

$$S_{r,\perp}(f) = \frac{5}{17} \varepsilon_\perp(f) \quad (45)$$

از آنجا که در این نمونه، $\varepsilon_\perp(f)$ در کل بازه کسر پرشدگی محدود باقی می‌ماند، حساسیت نسبی مؤلفه عمود نیز رفتار واگرا ندارد. اگر مقدار مجاز تغییر نسبی پارامتر مؤثر برابر

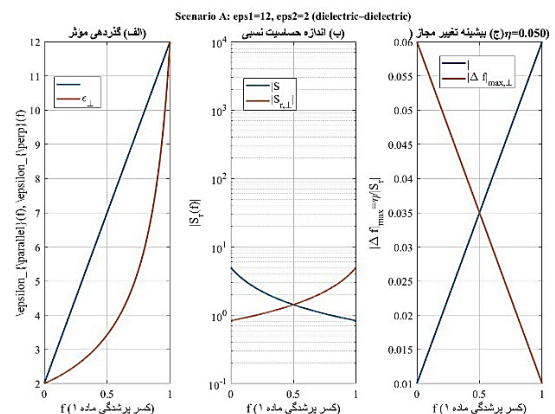
$$\eta = 0.05 \quad (46)$$

در نظر گرفته شود، بیشینه خطای مجاز کسر پرشدگی از رابطه (۱۳) محاسبه می‌شود. برای مؤلفه موازی داریم:

$$|\Delta f|_{\max,\parallel}(f) = 0.01 + 0.05f \quad (47)$$

رابطه (۴۷) نشان می‌دهد که در این نمونه، تفرانس مجاز کسر پرشدگی با افزایش f افزایش می‌یابد. بنابراین پاسخ مؤثر در نزدیکی $f = 0$ حساس‌تر است و در مقادیر بزرگ‌تر f پایداری بیشتری دارد.

شکل ۱ رفتار حساسیت نسبی و بیشینه خطای مجاز کسر پرشدگی برای نمونه هم‌علامت $\varepsilon_1 = 12$ و $\varepsilon_2 = 2$ در این حالت، هیچ نقطه صفر یا تکین در بازه فیزیکی $0 \leq f \leq 1$ وجود ندارد و حساسیت‌ها محدود باقی می‌مانند.



شکل ۱. گذردهی مؤثر، حساسیت نسبی، دامنه تغییر مجاز در سناریو A:

رفتار گذردهی مؤثر، اندازه حساسیت نسبی و دامنه تغییر مجاز کسر پرشدگی برای سناریوی دی‌الکتریک، (دی‌الکتریک $\varepsilon_1 = 12$ ، $\varepsilon_2 = 2$) در این حالت هیچ نقطه بحرانی وجود ندارد و هر دو مؤلفه حساسیت محدود باقی می‌مانند. دامنه تغییر مجاز به صورت یکنواخت و بدون فروپاشی ناگهانی تغییر می‌کند.

دامنه مجاز خطای کسر پرشدگی از معیار پایداری رابطه (۱۳) به دست می آید. بنابراین در میان طراحی هایی که شرط (۵۴) را برآورده می کنند، گزینه ای پایدارتر است که مقدار $|S_r(f_t)|$ کوچک تری داشته باشد که در نتیجه مقدار $|\Delta f|_{max}$ بزرگ تری ایجاد کند.

برای مؤلفه موازی، شرط طراحی هدف به صورت

$$\varepsilon_t = \varepsilon_\gamma + f_t^\parallel (\varepsilon_1 - \varepsilon_\gamma) \quad (55)$$

نوشته می شود. بنابراین کسر پرشدگی متناظر با مقدار هدف برابر است با

$$f_t^\parallel = \frac{\varepsilon_t - \varepsilon_\gamma}{\varepsilon_1 - \varepsilon_\gamma} \quad (56)$$

با جای گذاری $f_t^\parallel$ در رابطه حساسیت نسبی مؤلفه موازی، یعنی رابطه (۱۷)، داریم

$$|S_{r,\parallel}(f_t^\parallel)| = \left| \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_\gamma}{\varepsilon_t} \right| \quad (57)$$

رابطه (۵۷) نشان می دهد که برای یک مقدار هدف ثابت، افزایش کنتراست $|\varepsilon_1 - \varepsilon_\gamma|$ ، حساسیت طراحی را افزایش می دهد و در نتیجه دامنه مجاز خطای ساخت را کاهش می دهد.

برای مؤلفه عمود، شرط رسیدن به مقدار هدف از رابطه

$$\frac{1}{\varepsilon_t} = \frac{f_t^\perp}{\varepsilon_1} + \frac{1 - f_t^\perp}{\varepsilon_\gamma} \quad (58)$$

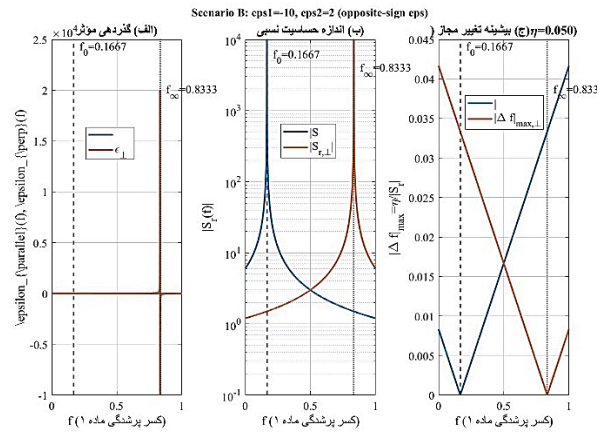
به دست می آید. حل این رابطه نسبت به $f_t^\perp$ می دهد:

$$f_t^\perp = \frac{\frac{1}{\varepsilon_t} - \frac{1}{\varepsilon_\gamma}}{\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_\gamma}} \quad (59)$$

پس از تعیین $f_t^\perp$ ، پایداری نقطه کاری باید با فاصله آن از ناحیه بحرانی مؤلفه عمود سنجیده شود. از آنجا که مؤلفه عمود در نزدیکی شرط $A(f) = 0$ رفتار تکین پیدا می کند، نقطه کاری مناسب نباید در نزدیکی این شرط قرار گیرد. اگر مقدار $A(f_t^\perp)$ کوچک باشد، نقطه کاری به ناحیه واگرایی مؤلفه عمود نزدیک است و در نتیجه $|S_{r,\perp}|$ بزرگ و $|\Delta f|_{max}$ کوچک خواهد بود.

بر این اساس، روند پیش طراحی پایدار به صورت زیر خلاصه می شود:

ابتدا زوج مواد کاندید $(\varepsilon_1, \varepsilon_\gamma)$ انتخاب می شود. سپس مقدار f_t لازم برای رسیدن به ε_t از رابطه (۵۶) یا رابطه (۵۹) محاسبه می شود. در ادامه، مقدار حساسیت نسبی در نقطه هدف و دامنه مجاز خطای ساخت از روابط (۹) و (۱۳) تعیین می گردد. و در نهایت، نقاط کاری نزدیک به نواحی بحرانی حذف می شوند. به این ترتیب، چارچوب تحلیلی حاضر امکان انتخاب طرحی را فراهم می کند که علاوه بر تحقق مقدار هدف، کمترین حساسیت و بیشترین تحمل ساخت را داشته باشد.



شکل ۲. گذردهی مؤثر، حساسیت نسبی، دامنه تغییر مجاز در سناریو B: رفتار گذردهی مؤثر، اندازه حساسیت نسبی و دامنه تغییر مجاز کسر پرشدگی برای سناریوی گذردهی های ناهم علامت $(\varepsilon_1 = -10, \varepsilon_\gamma = 2)$ صفر شدن $\varepsilon_\parallel$ در $f_0 \approx 0.1667$ و واگرایی $\varepsilon_\perp$ در $f_\infty \approx 0.8333$ به طور مستقیم موجب رشد حدی حساسیت و فروپاشی دامنه تغییر مجاز در همسایگی این نقاط می شود.

۳. مقایسه دو نمونه

مقایسه دو نمونه بالا نشان می دهد که علامت و اختلاف گذردهی دو ماده نقش تعیین کننده ای در پایداری طراحی دارند. هنگامی که هر دو گذردهی هم علامت هستند، پاسخ مؤثر در بازه کسر پرشدگی محدود باقی می ماند و حساسیت نسبی رفتار واگرا ندارد. در این حالت، انتخاب کسر پرشدگی می تواند با تolerانس ساخت نسبتاً بزرگ تری انجام شود.

در مقابل، هنگامی که گذردهی های دو ماده ناهم علامت هستند، نقاط نزدیک صفر یا تکین می توانند در بازه فیزیکی $0 < f < 1$ ظاهر شوند. این نقاط از نظر کنترل پاسخ مؤثر و دستیابی به مقادیر غیر معمول گذردهی اهمیت دارند؛ اما از نظر پایداری ساخت، نواحی پرخطر محسوب می شوند. بنابراین طراحی در نزدیکی این نقاط نیازمند کنترل دقیق تر ضخامت لایه ها و کاهش خطای کسر پرشدگی است.

۴. کاربرد چارچوب تحلیلی در پیش طراحی پایدار

روابط تحلیلی به دست آمده می توانند به عنوان یک ابزار پیش طراحی برای انتخاب کسر پرشدگی و ارزیابی پایداری ساختاری به کار روند. در این مرحله، هدف تنها رسیدن به یک مقدار مشخص از گذردهی مؤثر نیست؛ بلکه نقطه کاری باید به گونه ای انتخاب شود که نسبت به تغییرات کوچک f کمترین حساسیت را داشته باشد. اگر مقدار هدف گذردهی مؤثر با ε_t نشان داده شود، شرط اصلی طراحی به صورت

$$\varepsilon_{eff}(f_t) = \varepsilon_t \quad (60)$$

نوشته می شود. پس از تعیین مقدار هدف f_t ، حساسیت نسبی در همان نقطه با استفاده از رابطه (۹) محاسبه می شود. سپس

بحث

نتایج به دست آمده در این مقاله نشان می‌دهد که وابستگی پارامترهای مؤثر فراماده‌های لایه‌ای به کسر پرشدگی، از نظر طراحی تنها یک وابستگی مقداری نیست؛ بلکه یک وابستگی مشتقی تعیین کننده نیز هست. به بیان دقیق تر، دو طراحی با مقدار یکسان گذردهی مؤثر می‌توانند از نظر پایداری در برابر خطای ساخت رفتار کاملاً متفاوتی داشته باشند؛ زیرا حساسیت نسبی آن‌ها نسبت به کسر پرشدگی ممکن است، متفاوت باشد. همان گونه که در بخش «کاربرد چارچوب تحلیلی در پیش طراحی پایدار» نشان داده شد، روابط حساسیت نسبی و دامنه مجاز تغییر کسر پرشدگی می‌توانند به عنوان یک ابزار پیش طراحی برای انتخاب زوج مواد و نقطه کاری پایدار به کار روند. بنابراین انتخاب مقدار f باید نه تنها بر اساس دستیابی به پارامتر مؤثر هدف، بلکه با توجه به کوچک بودن $|S_r(f)|$ انجام شود.

در راستای موازی با لایه‌ها، گذردهی مؤثر تابعی خطی از کسر پرشدگی است. در نتیجه، مشتق مطلق مستقل از f باقی می‌ماند و رفتار حساسیت نسبی تنها از طریق مقدار گذردهی مؤثر کنترل می‌شود. در صورتی که هر دو ماده گذردهی مثبت داشته باشند، صفر شدن گذردهی مؤثر رخ نمی‌دهد و حساسیت نسبی محدود باقی می‌ماند. با این حال، اگر گذردهی دو ماده ناهم علامت باشد، نقطه‌ای وجود خواهد داشت که گذردهی مؤثر صفر می‌شود و در همسایگی آن، حساسیت نسبی با قانون $|f - f_0|^{-1} \sim$ رشد می‌کند. این نتیجه نشان می‌دهد که طراحی‌های نزدیک به شرایط گذردهی نزدیک صفر در راستای موازی، ذاتاً نسبت به خطای ساخت حساس تر هستند.

در راستای عمود بر لایه‌ها، رفتار غیرخطی تر است، زیرا گذردهی مؤثر از معکوس یک تابع خطی از کسر پرشدگی به دست می‌آید. اگر $A(f)$ همان مخرج میانگین هارمونیک تعریف شده در رابطه (۴۲) باشد؛ آنگاه طبق رابطه (۴۳) می‌توان نوشت $\varepsilon_{\perp}^{\text{eff}}(f) = 1/A(f)$. در نتیجه، کوچک شدن $A(f)$ می‌تواند به افزایش شدید $\varepsilon_{\perp}^{\text{eff}}$ و حساسیت نسبی منجر شود. تحلیل حدی نشان داد که در همسایگی نقطه‌ای که $A(f) \rightarrow 0$ و در نتیجه $\varepsilon_{\perp}^{\text{eff}} \rightarrow \infty$ ، حساسیت نسبی با قانون $|f - f_0|^{-1} \sim$ رشد می‌کند. بنابراین حتی اگر هدف طراحی صفر شدن گذردهی نباشد، نزدیک شدن به ناحیه‌ای که مخرج رابطه هارمونیک کوچک است، طراحی را نسبت به تغییرات کوچک کسر پرشدگی بسیار حساس می‌کند. البته در مدل ایده آل با گذردهی‌های حقیقی، متناهی و هم علامت، $A(f)$ در بازه $0 < f < 1$ صفر نمی‌شود و بنابراین واگرایی واقعی رخ نمی‌دهد؛

اما برای گذردهی‌های ناهم علامت، یا در شرایطی که پاسخ مواد مختلط، اتلافی یا شدیداً پاشنده باشد، مقدار $|A(f)|$ می‌تواند بسیار کوچک شود و قله‌های حساسیت بزرگ اما محدود ایجاد کند.

محدودیت‌های تحلیل حاضر نیز باید مورد توجه قرار گیرد. نخست آنکه مدل محیط مؤثر تنها زمانی معتبر است که دوره ساختار لایه‌ای نسبت به طول موج مؤثر بسیار کوچک باشد. اگر $a = d_1 + d_2$ دوره تناوب ساختار باشد، شرط همگن سازی را می‌توان به صورت $a \ll \lambda_{\text{eff}}$ یا به طور معادل، $k_0 a \ll 1$ بیان کرد. در محیط‌هایی با ضریب شکست بزرگ، طول موج داخل ماده کاهش می‌یابد و بنابراین شرط سخت گیرانه تر

$$a \ll \frac{\lambda_0}{n_{\text{max}}}$$

مناسب تر است. در صورتی که این شرط‌ها برقرار نباشند، اثرات پراکندگی فضایی، پراکندگی براگ، کوپلینگ بین مدی و وابستگی پاسخ مؤثر به بردار موج ظاهر می‌شوند و گذردهی مؤثر دیگر تنها تابع فرکانس نیست؛ بلکه به صورت $\varepsilon_{\text{eff}} = \varepsilon_{\text{eff}}(\omega, k)$ توصیف می‌شود. در چنین شرایطی، روابط تحلیلی حاضر باید به عنوان تقریب مرتبه اول در حد زیر طول موج تفسیر شوند.

دوم آنکه در استخراج روابط حدی، گذردهی‌های مواد به صورت حقیقی، متناهی و با تلفات ناچیز در نظر گرفته شده‌اند. در چنین حد ایده‌آلی، اگر مخرج مؤثر رابطه حساسیت در نزدیکی یک نقطه بحرانی به صورت خطی صفر شود، رفتار حدی از نوع

$$|f - f_0|^{-1} \sim \text{یا} |f - f_{\infty}|^{-1} \sim$$

به دست می‌آید. این رفتار نتیجه مستقیم ساختار ریاضی روابط محیط مؤثر است. با این حال، نزدیک تشدیدهای مادی یا ساختاری، پاسخ محیط می‌تواند به شدت پاشنده و غیرموضعی شود. در این حالت، مکان نقطه بحرانی، پهنای ناحیه حساس و مقدار بیشینه حساسیت ممکن است نسبت به پیش بینی مدل محیط مؤثر محلی جابه‌جا شود. بنابراین در نزدیکی تشدیدها یا در ساختارهایی که دوره آن‌ها دیگر به طور کافی زیر طول موج نیست؛ لازم است نتایج تحلیلی با شبیه سازی تمام موج یا داده تجربی کنترل شوند.

در محیط‌های واقعی، گذردهی‌ها عموماً مختلط هستند و می‌توان نوشت

$$\varepsilon_i = \varepsilon'_i + i\varepsilon''_i.$$

در چنین حالتی، صفر حقیقی مخرج معمولاً حذف می‌شود؛ زیرا مخرج دیگر دقیقاً به صفر نمی‌رسد. اگر در نزدیکی نقطه

بحرانی، مخرج مؤثر به صورت

$$G(f) \simeq a(f - f_0) + iy$$

نوشته شود، آنگاه رفتار حساسیت به شکل

$$|S_r(f)| \sim \frac{1}{\sqrt{|a|^2 (f - f_0)^2 + \gamma^2}}$$

درمی آید. بنابراین تلفات واگرایی ریاضی را منظم می کند؛ یعنی واگرایی نامتناهی را به یک قله محدود اما بزرگ تبدیل می کند. ارتفاع این قله تقریباً با $1/\gamma$ مقیاس می شود و پهنای آن به اندازه سهم اتلافی وابسته است. به بیان دیگر، قانون $1/\gamma \sim |f - f_0|$ یک حد ایده آل برای محیط های حقیقی و بدون تلفات است؛ در حالی که در محیط های اتلافی همان ساختار ریاضی به صورت یک قله با ارتفاع محدود و پهنای وابسته به $\text{Im}(\varepsilon)$ ظاهر می شود.

در حضور پاشندگی فرکانسی قوی نیز اگر f متغیر طراحی باشد و فرکانس ثابت نگه داشته شود، ساختار جبری وابستگی به f همچنان مشابه است؛ با این تفاوت که ضرایب $\varepsilon_1(\omega)$ و $\varepsilon_2(\omega)$ فرکانس وابسته اند. اما اگر هم f و هم ω تغییر کنند، حساسیت کل باید به صورت مشتق کامل نوشته شود:

$$d\varepsilon_{\text{eff}} = \frac{\partial \varepsilon_{\text{eff}}}{\partial f} df + \frac{\partial \varepsilon_{\text{eff}}}{\partial \omega} d\omega$$

در این حالت، پاشندگی قوی می تواند مکان نقطه بحرانی، پهنای ناحیه حساس و ارتفاع قله حساسیت را تغییر دهد. با این حال، منشأ اصلی افزایش حساسیت همچنان کوچک شدن قدر مطلق مخرج روابط محیط مؤثر یا رابطه حساسیت است، نه

یک ویژگی عددی خاص از مثال های انتخاب شده.

نتیجه گیری

در این مقاله، وابستگی پارامترهای مؤثر فراماده های لایه ای زیر حد طول موج به کسر پرشدگی به صورت تحلیلی بررسی شد و حساسیت مطلق و نسبی این پارامترها نسبت به تغییرات کوچک در کسر پرشدگی استخراج گردید. با تعریف یک معیار کمی برای تغییر نسبی مجاز، رابطه ای صریح برای دامنه تغییر مجاز کسر پرشدگی ارائه شد که امکان ارزیابی پایداری طراحی را فراهم می کند. تحلیل نشان داد که در راستای موازی با لایه ها، رفتار حساسیت خطی و نسبتاً یکنواخت است؛ مگر در شرایطی که گذردهی مؤثر به صفر نزدیک شود. در راستای عمود، رفتار غیرخطی بوده و در نزدیکی نقاط واگرایی گذردهی، حساسیت نسبی به طور حدی افزایش می یابد. در هر دو حالت، نزدیک شدن به نقاط بحرانی موجب کاهش شدید دامنه تغییر مجاز کسر پرشدگی می شود و طراحی را نسبت به خطای ساخت حساس می کند. چارچوب ارائه شده یک ابزار تحلیلی ساده برای پیش بینی پایداری طراحی فراهم می کند و می تواند پیش از انجام شبیه سازی های عددی یا فرایند ساخت، برای انتخاب بازه مناسب کسر پرشدگی و اختلاف گذردهی مواد سازنده استفاده شود. این رویکرد امکان تصمیم گیری آگاهانه تر در طراحی فراماده های لایه ای را فراهم می کند و می تواند در توسعه ساختارهای پایدارتر از نظر ساختاری مفید واقع شود.

References

- [1] Rytov, S. M. (1956). Electromagnetic properties of a finely stratified medium. *Soviet Physics JETP*, 2, 466–475.
- [2] Yeh, P. (1988). *Optical waves in layered media*. Wiley.
- [3] Sihvola, A. (1999). *Electromagnetic mixing formulae and applications*. IET.
- [4] Milton, G. W. (2002). *The theory of composites*. Cambridge University Press.
- [5] Smith, D. R., & Pendry, J. B. (2006). Homogenization of metamaterials by field averaging (invited paper). *Journal of the Optical Society of America B*, 23(3), 391–403.
- [6] Silveirinha, M. G. (2007). A metamaterial homogenization approach with application to the characterization of microstructured composites with negative parameters. *Physical Review B*, 75, 115104.
- [7] Kikuta, H., Ohira, Y., & Iwata, K. (1998). Effective medium theory of two-dimensional subwavelength gratings. *Journal of the Optical Society of America A*, 15(6), 1577–1585.
- [8] Poddubny, A., Iorsh, I., Belov, P., & Kivshar, Y. (2013). Hyperbolic metamaterials. *Nature Photonics*, 7, 948–957.

منابع

- [9] Shekhar, P., Atkinson, J., & Jacob, Z. (2014). Hyperbolic metamaterials: Fundamentals and applications. *Nano Convergence*, 1, 14.
- [10] Orlov, A. A., Voroshilov, P. M., Belov, P. A., & Kivshar, Y. S. (2011). Engineered optical nonlocality in nanostructured metamaterials. *Physical Review B*, 84, 045424.
- [11] Alù, A., Silveirinha, M. G., Salandrino, A., & Engheta, N. (2007). Epsilon-near-zero metamaterials and electromagnetic sources: Tailoring the radiation phase pattern. *Physical Review B*, 75, 155410.
- [12] Maas, R., Parsons, J., Engheta, N., & Polman, A. (2013). Experimental realization of an epsilon-near-zero metamaterial at visible wavelengths. *Nature Photonics*, 7, 907–912.
- [13] Mahmoud, A. M., & Engheta, N. (2014). Wave-matter interactions in epsilon-and-mu-near-zero structures. *Nature Communications*, 5, 5638.
- [14] Niu, X., Hu, X., Chu, S., & Gong, Q. (2018). Epsilon-near-zero photonics: A new platform for integrated devices. *Advanced Optical Materials*, 6, 1701292.
- [15] He, Q., Xiao, S., Li, X., & Zhou, L. (2013). Optic-null medium: Realization and applications. *Optics*

- Express*, 21(23), 28948–28959.
- [16] Macleod, H. A. (2010). *Thin-film optical filters* (4th ed.). CRC Press.
- [17] Sullivan, B. T., & Dobrowolski, J. A. (1992). Deposition error compensation for optical multilayer coatings. I. Theoretical description. *Applied Optics*, 31(19), 3821–3835.
- [18] Thelen, A. (n.d.). Errors and tolerances in optical coatings. Society of Vacuum Coaters.
- [19] Application of thin film errors sensitivity control concept to robust design of multilayer optical coatings. (n.d.).
- [20] Sadeghi, M. M., Li, S., Xu, L., Hou, B., & Chen, H. (2015). Transformation optics with Fabry–Pérot resonances. *Scientific Reports*, 5, 8680.
- [21] Sadeghi, M. M., Nadgaran, H., & Chen, H. (2014). Perfect field concentrator using zero index metamaterials and perfect electric conductors. *Frontiers of Physics*, 9, 90–93.
- [22] Sadeghi, M. M., & Nadgaran, H. (2019). Feasible rotator using zero index metamaterials and perfect electric conductors. *arXiv preprint arXiv:1909.01777*.
- [23] Sadeghi, M. M. (2021). Perfect directional cloak based on double near-zero metamaterials and magnetic field concentrators. *Physica Scripta*.
- [24] Sadeghi, M. M. (2022). Radar cross section approach in illusion effects of transformation optics-based expander. *Frontiers in Materials*, 9.
- [25] Sadeghi, M. M. (2023). Close solution to acoustic illusion in layered media. *Acoustical Physics*, 69(1), 1–6.