Autumn (2023) 6(2): **(Times new roman 12)**

DOI: 1

Received: Accepted:

Optoelectronic

Open Access

ORIGINAL ARTICLE

Stabilization of Harmonic Oscillator System via Eigenvalue Assignment through State Space Model

Correspondence

ABSTRACT

In this research, we investigate the stability of harmonic oscillator systems. To achieve this, we transform the differential equation describing the oscillator into a state-space model using appropriate variables, enabling the application of matrix algebraic relationships to design a stabilizing controller for the system under study. Within the state-space framework, by utilizing state matrices and eigenvalue assignment techniques, we can develop a state feedback control law. The parameters of this controller are tuned such that the closed-loop system eigenvalues (which determine stability) are positioned in favorable locations within the complex plane, thereby ensuring system stability.

KEYWORDS

Harmonic Oscillator, Stability, State-Space Model, Eigenvalue Assignment.

How to cite

(2025). Stabilization of Harmonic Oscillator System via Eigenvalue Assignment through State Space Model. Optoelectronic, 6(2), 25-44.

https://jphys.journals.pnu.ac.ir/

مشخصات شماره شامل سال نشر، شماره پیاپی، فصل (شماره صفحه آغاز-
شماره صفحه پایان) (B mitra11)

تاریخ دریافت: تاریخ پذیرش:

DOI:

نشریه علمی

اپتوالکترونیک

«مقاله پژوهشی»

پایدارسازی سامانه نوسانگر هارمونیک با رویکرد تخصیص مقادیر ویژه در مدل فضای حالت

چکیده

در این پژوهش به بررسی موضوع پایداری در سامانه‌های نوسانگر هارمونیک می‌پردازیم. بدین منظور معادله دیفرانسیل توصیف‌کننده نوسانگر را با استفاده از متغیرهای مناسب به مدل فضای حالت تبدیل می‌کنیم تا امکان استفاده از روابط جبری ماتریسی به منظور طراحی یک کنترل‌کننده پایدارساز برای سامانه مورد مطالعه فراهم شود. در مدل فضای حالت می‌توانیم با به کار بردن ماتریس‌های حالت و تکنیک تخصیص مقادیر ویژه، یک قانون کنترل مبتنی بر بازخورد حالت طراحی کنیم. مولفه‌های غیرثابت این کنترل‌کننده به گونه‌ای تنظیم می‌شوند که مقادیر ویژه در حالت حلقه بسته (که تعیین‌کننده پایداری هستند) در موقعیت‌های مطلوبی از صفحه مختلط قرار گیرند تا در نهایت منجر به پایداری سامانه شود.

واژه‌های کلیدی

نوسانگر هارمونیک، پایداری، مدل فضای حالت، تخصیص مقدار ویژه.

نویسنده مسئول:

استناد به این مقاله:

(۱۴۰۴). پایدارسازی سامانه نوسانگر هارمونیک با رویکرد تخصیص مقادیر ویژه در مدل فضای حالت. اپتوالکترونیک، سال و شماره چاپ، شماره صفحه,

https://jphys.journals.pnu.ac.ir/

۱. مقدمه

نوسانگر هارمونیک یکی از سامانه‌های بنیادی در فیزیک و مهندسی است که به صورت گسترده‌ای در کاربردهای صنعتی و علمی ظاهر شده و از جنبه‌های گوناگون نظیر پایداری، میرایی، کاربرد در سامانه‌های کوانتومی و ... مورد تحلیل و بررسی قرار گرفته است [۴-۱]. یکی از ویژگی‌هایی که بررسی آن برای یک نوسانگر هارمونیک ضرورت دارد پایداری است؛ پایداری ویژگی‌ای است که رفتار نوسانگر را در برابر اختلال‌های کوچک مشخص می‌کند. درواقع، یک نوسانگر پایدار نوسانگری است که اگر از حالت تعادل خود منحرف شود بتواند دوباره به همان حالت بازگردد و یا حداقل در نزدیکی حالت تعادل قرار گیرد و رفتار آن از کنترل خارج نشود. پایداری برای نوسانگر هارمونیک نه تنها به عملکرد بهینه و کاهش خطای سامانه کمک می‌کند بلکه با کم کردن احتمال خرابی و آسیب می‌تواند منجر به ایمنی بیشتر شود. علاوه‌براین با شناخت و تعیین وضعیت پایداری نوسانگر، پیش‌بینی دقیق‌تری از رفتار سامانه انجام خواهد شد که باعث می‌شود تحلیل و طراحی کارآمدتری برای نوسانگر داشته باشیم. به عنوان مثال، سامانه جرم-فنر-میراگر به عنوان یک نوسانگر هارمونیک که پایداری آن حائز اهمیت است در سامانه تعلیق خودرو (فنر و کمک فنر) به کار رفته است. هنگام حرکت خودرو که برخورد چرخ‌ها با جاده اجتناب‌ناپذیر است، پایداری سامانه تعلیق باعث راحتی و ایمنی خودرو و جلوگیری از نوسانات غیرقابل کنترل بدنه خودرو می‌شود. تاکنون مطالعات متنوعی با موضوع پایداری در مورد نوسانگرهای هارمونیک انجام شده که اغلب این پژوهش‌ها با استفاده از مدل دینامیک اولیه نوسانگر هارمونیک که یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم می‌باشد انجام گرفته است [۹-۵].

هرچند دینامیک سامانه‌های نوسانگر هارمونیک به وسیله یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم بیان می‌شود ولی می‌توانیم آنرا به یک مدل خطی مرتبه اول و استاندارد به نام مدل فضای حالت تبدیل کنیم. مدل فضای حالت ابزار قدرتمندی برای توصیف و تحلیل بسیاری از سامانه‌های دینامیکی است؛ با استفاده از این مدل می‌توانیم تحلیل پایداری سامانه را براساس ویژگی‌های ماتریس حالت بررسی نموده و با روش‌های مختلف از جمله تخصیص مقادیر ویژه، یک کنترل‌کننده مطلوب برای سامانه ارائه کنیم. به کارگیری تکنیک تخصیص مقادیر ویژه راهکاری برای بهینه‌سازی طراحی کنترل‌کننده ارائه می‌دهد که نسبت به روش‌های کلاسیک قدیمی نظیر PID انعطاف‌پذیری بیشتری دارد.

در این مقاله تصمیم داریم با استفاده از مدل فضای حالت و مسئله تخصیص مقادیر ویژه به بررسی پایداری سامانه نوسانگر هارمونیک بپردازیم. بدین منظور، ابتدا با استفاده از متغیرهای مناسب، معادله دیفرانسیل نوسانگر هارمونیک را در فرم فضای حالت بیان می‌کنیم و پس از آن کنترل‌کننده پایدارساز را براساس یک ماتریس بازخورد حالت با مولفه‌های غیرثابت محاسبه می‌کنیم. وجود مولفه‌های غیرثابت در ماتریس بازخورد حالت باعث می‌شود بتوانیم کنترل‌گر را به صورت پویا و براساس حالت‌های سامانه تنظیم کنیم. به عبارت دیگر می‌توانیم مولفه‌های متغیر را با تغییر شرایط سامانه تطبیق داده و در نتیجه پایداری و عملکرد بهتری از سامانه دریافت کنیم.

۲. مدل فضای حالت برای یک سامانه کنترل خطی

مدل فضای حالت یک چارچوب ریاضی برای توصیف سامانه‌های دینامیکی با استفاده از متغیرهای حالت (کمیت‌هایی که اطلاعات ضروری برای پیش‌بینی رفتار آتی سامانه را نشان می‌دهند) می‌باشد. ساختار مدل فضای حالت برای سامانه‌های کنترل خطی به صورت معادله دیفرانسیل مرتبه اول زیر ارائه می‌شود:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad (۲.۱)$$

که در آن $x(t) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ بردار حالت و $u(t) \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ بردار کنترل یا بردار ورودی نامیده می‌شوند. ماتریس‌های $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ و $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ نیز ماتریس‌های سامانه هستند که اگر درایه‌های آن‌ها متغیر با زمان باشد (۲.۱) را سامانه متغیر زمانی و در غیر اینصورت آن‌را سامانه تغییرناپذیر با زمان می‌نامیم. متناظر با هر سامانه کنترل خطی به فرم (۲.۱)، می‌توانیم ماتریسی موسوم به ماتریس کنترل‌پذیری به صورت زیر داشته باشیم:

$$C = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^nB] \qquad (۲،۲)$$

تعریف ۱: سامانه کنترل خطی (۲.۱) را کنترل‌پذیر می‌نامیم هرگاه بتوانیم بردار کنترل‌کننده‌ای مانند $u(t)$ تعیین کنیم به طوریکه حالت $x(t)$ در سامانه مورد نظر در مدت زمان محدود از هر حالت اولیه $x(t_0)$ به هر حالت نهایی دلخواه $x(t_f)$ منتقل شود [۱۰].

براساس قضیه زیر می‌توانیم از ماتریس کنترل‌پذیری C به عنوان معیاری برای بررسی کنترل‌پذیر بودن سامانه تحت مطالعه استفاده کنیم:

قضیه ۱: سامانه (۲.۱) کنترل‌پذیر است اگر و تنها اگر ماتریس کنترل‌پذیری C دارای رتبه کامل باشد؛ یعنی: $rank\ C = n$ [۱۰].

تبصره: سامانه‌های مورد نظر در این مقاله، از نوع سامانه‌های کنترل خطی *تغییر ناپذیر* با زمان و *کنترل‌پذیر* هستند.

همان‌طور که قبلا اشاره شد، پایداری یکی از ویژگی‌های مهم و کلیدی سامانه‌های کنترل خطی است. پایداری در حالت‌های مختلفی تحت عناوین پایداری لیاپانوف، مجانبی، نمایی و ... مطرح شده است که در این مقاله، مفهوم پایداری مجانبی را مورد توجه قرار داده و به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

تعریف ۲: سامانه کنترل خطی(۲.۱) پایدار مجانبی نامیده می‌شود هرگاه به ازای ورودی صفر ($u(t) = 0$) و به ازای هر حالت اولیه محدود (متناهی) $x(0) \neq 0$ داشته باشیم:

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0 \qquad (۲.۳)$$

به عبارت دیگر، اگر سامانه (۲.۱) پایدار باشد آنگاه بردار حالت $x(t)$ برای این سامانه با توجه به ورودی $u(t) = 0$ و شرط اولیه $x(0)$، به مبدأ منتقل می‌شود [۱۰].

فرض کنید ورودی کنترل‌کننده سامانه (۲.۱) را متناسب با حالت سامانه به صورت $u(t) = Fx(t)$ انتخاب کنیم (F ماتریسی با درایه‌های حقیقی موسوم به ماتریس بازخورد حالت است). بازخورد حالت از نظر فیزیکی می‌تواند به این معنی باشد که در هر لحظه، ورودی کنترل‌کننده $u(t)$ (مثل نیروی خارجی، ولتاژ ...) براساس وضعیت فعلی سامانه (مثل مکان، جریان ...) تنظیم می‌شود تا رفتار سامانه مطلوب باشد. درواقع، سامانه با سنجش وضعیت خود، ورودی متناسب با این وضعیت را به کار می‌گیرد تا خودش را اصلاح کند. پس از جایگذاری این ورودی در سامانه (۲.۱)، فرم حلقه بسته سامانه را به صورت معادله دیفرانسیل همگن زیر خواهیم داشت:

$$\dot{x}(t) = (A + BF)x(t) \qquad (۲.۴)$$

قضیه ۲: سامانه کنترل خطی (۲.۱) پایدار است اگر و تنها اگر مقادیر ویژه سامانه حلقه بسته (۲.۴) دارای قسمت حقیقی منفی باشند [۱۰].

با توجه به قضیه فوق، با تعیین یک ماتریس بازخورد مناسب به صورت F به طوریکه مقادیر ویژه $A + BF$ قسمت حقیقی منفی داشته باشند، می‌توانیم سامانه ناپایدار را به وضعیت پایدار هدایت کنیم. قضیه زیر شرط لازم و کافی برای وجود چنین ماتریس بازخوردی را بیان می‌کند:

قضیه ۳: ماتریس بازخورد F که مقادیر ویژه دلخواه $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ را به ماتریس حلقه بسته $A + BF$ تخصیص دهد وجود دارد اگر و تنها اگر سامانه مورد نظر، کنترل‌پذیر باشد [۱۰].

در ادامه این مقاله، در نظر داریم با معرفی متغیرهای مناسب، نوسانگر هارمونیک را به یک سامانه کنترل خطی کنترل‌پذیر تبدیل نموده و پایداری آن‌را با ارائه ماتریس بازخورد حالتی که شرایط قضیه ۲ را فراهم نماید تضمین کنیم.

۳. پایدارسازی نوسانگر هارمونیک

در این قسمت یک نوسانگر هماهنگ که با معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر معرفی شده است را در نظر می‌گیریم:

$$M\ddot{y}(t)+D\dot{y}(t)+Ky(t)=u(t) \qquad (۳.۱)$$

که در آن بردار n-بعدی y نشان‌دهنده تغییر مکان می‌باشد. همچنین M ماتریس جرم، D ماتریس تعدیل و K ماتریس سختی، همگی ماتریس‌هایی با درایه‌های حقیقی و $n\times n$ هستند و ماتریس جرم M نامنفرد است. $u(t)$ نیز نشان‌دهنده نیرویی است که به این نوسانگر هارمونیک وارد می‌شود.

رویکرد ما در این مقاله برای پایدارسازی نوسانگر (۳.۱) تبدیل کردن آن به صورت یک سامانه کنترل خطی در فرم (۲.۱) است. با توجه به اینکه ماتریس M در معادله (۳.۱) یک ماتریس نامنفرد است، می‌توانیم (۳.۱) را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\ddot{y}(t)=M^{-1}u(t)-M^{-1}D\dot{y}(t)-M^{-1}Ky(t) \qquad (۳.۲)$$

انتگرال‌گیری از رابطه (۳.۲) منجر به رابطه (۳.۳) به صورت زیر می‌شود:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t\int_0^s\big(M^{-1}u(\tau)-M^{-1}D\dot{y}(\tau)-M^{-1}Ky(\tau)\big)d\tau ds+y(0)+\dot{y}(0)\\ &= \underbrace{\int_0^t[-M^{-1}Dy(s)+\underbrace{M^{-1}Dy(0)+\dot{y}(0)+\int_0^s\big(M^{-1}u(\tau)-M^{-1}Ky(\tau)\big)d\tau}_{x_2(s)}]ds+y(0)}_{x_1(t)} \end{aligned} \qquad (۳.۳)$$

بنابراین با توجه به انتخاب‌های مشخص شده برای x_1 و x_2 در رابطه (۳.۳) داریم:

$$\begin{aligned} y(t) &= x_1(t)\\ \dot{x}_1(t) &= -M^{-1}Dy(t)+x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= M^{-1}u(t)-M^{-1}Ky(t) \end{aligned} \qquad (۳.۴)$$

بدین ترتیب معادله نوسانگر را در مدل فضای حالت به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t)+Bu(t)\\ &= \begin{bmatrix} -M^{-1}D & I\\ -M^{-1}K & 0 \end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix} O\\ M^{-1} \end{bmatrix}u(t) \end{aligned} \qquad (۳.۵)$$

به طوریکه در ماتریس‌های بلوکی فوق، O و I به ترتیب ماتریس‌های صفر و همانی هستند. به راحتی می‌توان بررسی نمود که ماتریس‌های بلوکی فوق یک ماتریس کنترل‌پذیری رتبه کامل مانند (۲.۲) تولید می‌کنند. لازم به توضیح است که در اینجا منظور از ماتریس رتبه کامل ماتریسی است که رتبه آن با بعد فضای برداری تولید کننده ماتریس برابر است. بدین‌ترتیب سامانه کنترل خطی متناظر با نوسانگر (۳.۱) یک سامانه کنترل‌پذیر است.

همان طور که قبلا اشاره شد، برای پایدار کردن سامانه کنترل خطی کافیست ماتریس بازخوردی داشته باشیم که طیفی از مقادیر عددی با قسمت حقیقی منفی را به عنوان مقادیر ویژه به ماتریس حلقه بسته تخصیص دهد. روش‌های مختلفی برای انجام دادن این تخصیص وجود دارد که براساس رویکردهای مختلف اعم از محاسبه ماتریس با درایه‌های ثابت یا درایه‌های متغیر طراحی شده‌اند. روش مورد استفاده در این مقاله برای تخصیص مقدار ویژه، رویکردی برمبنای محاسبه ماتریس با درایه‌های متغیر است که امکان انتخاب مقدار دلخواه برای بعضی از درایه‌های متغیر را نیز در اختیارمان قرار می‌دهد [۱۱].

بدین منظور لازم است که ابتدا با استفاده از یک ماتریس تشابهی مانند T زوج ماتریسی (A,B) متناظر با نوسانگر

هارمونیک را که از رابطه (۳.۲) به دست آورده‌ایم به فرم همدم برداری (به صورت زیر) تبدیل کنیم:

$$\tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} D_0 \\ O_{n-m,m} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} G_0 \\ I_{n-m}, O_{n-m,m} \end{bmatrix} \qquad (۳,۶)$$

در فرم همدم برداری فوق، بلوک‌های G_0 و D_0 ماتریس‌هایی با درایه‌های حقیقی هستند که به ترتیب دارای ابعاد $m \times n$ و $m \times m$ می‌باشند [۱۲]. لازم به ذکر است که کنترل‌پذیر بودن زوج (A, B) امکان دستیابی به فرم همدم برداری را تضمین می‌کند؛ در نتیجه با توجه به اینکه ماتریس‌های A و B متناظر با نوسانگر هماهنگ مورد نظر در این مقاله یک زوج کنترل‌پذیر می‌سازند، محدودیتی از نظر محاسبه فرم همدم برداری نخواهیم داشت.

اکنون ماتریس بازخورد پیشنهادی متناظر با فرم حلقه بسته (۲.۴) را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم:

$$F = D_0^{-1}(-G_0 + G_\lambda)T^{-1} \qquad (۳.۷)$$

که در آن ماتریس $G_\lambda \in \mathbb{R}^{m\times n}$ قسمتی از ماتریس بازخورد F است که شامل درایه‌های متغیر می‌باشد و محاسبه درایه‌های متغیر این ماتریس منجر به یک دستگاه معادلات خطی با n معادله و nm مجهول می‌شود. بنابراین می‌توانیم برای $N = n(m-1)$ درایه مجهول از این ماتریس که مولفه‌های آزاد محسوب می‌شوند، مقادیر دلخواه انتخاب کنیم و سایر درایه‌ها را از طریق حل دستگاه معادلات خطی به دست آوریم. بدین ترتیب یک ماتریس بازخورد F به دست می‌آوریم که نوسانگر هارمونیک مورد نظر را از طریق انتقال مقادیر ویژه به طیف معینی از مقادیر عددی با قسمت حقیقی منفی، پایدار می‌سازد.

در ادامه، محاسبات فوق را برای پایدارسازی یک نوسانگر هارمونیک به کار می‌بریم.

۴. مثال عددی

برای روشن‌تر شدن روشی که در بخش قبل معرفی شد، یک نوسانگر هماهنگ به فرم معادله (۳.۱) با ماتریس‌های عددی زیر در نظر می‌گیریم:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

به سادگی می‌توان بررسی نمود که M یک ماتریس متقارن معین مثبت است. از آنجا که $D^T = D \ , \ K^T = K$ پس این دو ماتریس متقارن هستند. اکنون با توجه به متقارن بودن این دو ماتریس و با توجه به نامنفی بودن مقادیر ویژه آن‌ها ($eig(K) = \{1,3\}$ و $eig(D) = \{0, 0.2\}$) می‌توان نتیجه گرفت که این ماتریس‌ها شبه معین مثبت (نیمه معین مثبت) هستند. برای بیان کردن این نوسانگر به فرم یک سامانه کنترل خطی، با استفاده از روابط (۳.۵)، ماتریس‌های سامانه به صورت زیر خواهند بود:

$$A = \begin{bmatrix} -M^{-1}D & I \\ -M^{-1}K & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.1 & 1 & 0 \\ 0.1 & -0.1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} O \\ M^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

در اینصورت فرم همدم برداری متناظر با ماتریس‌های اخیر طبق روابط (۳.۶) عبارت خواهد بود از:

$$\tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} D_0 \\ O_{n-m,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} G_0 \\ I_{n-m}, O_{n-m,m} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.1 & 0.1 & -2 & 1 \\ 0.1 & -0.1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

که در آن ماتریس تبدیل تشابهی T و وارون آن T^{-1} عبارت خواهند بود از:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0.1 & -0.1 \\ 0 & 1 & -0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.1 & 1 & 0 \\ 0.1 & -0.1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 1 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$G_0 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.1 & -2 & 1 \\ 0.1 & -0.1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$D_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

اکنون ماتریس بلوکی $\tilde{A}_\lambda$ را به صورت زیر درنظرمی‌گیریم:

$$\tilde{A}_\lambda = \begin{bmatrix} G_\lambda \\ \hline I \;,\; O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ \hline I & & , & O \end{bmatrix}$$

که در آن ماتریس G_λ قسمتی از ماتریس بازخورد F است که شامل درایه‌های متغیر می‌باشد. می‌خواهیم مولفه‌های مجهول این ماتریس را به نحوی محاسبه کنیم که مقادیر ویژه در حالت حلقه بسته در مجموعه $\{-1, -0.8, -0.5, -0.2\}$ قرار گیرند. چند جمله‌ای مشخصه متناظر با این طیف مقادیر ویژه عبارتست از:

$$P(\lambda) = \lambda^4 + 2.5\lambda^3 + 2.16\lambda^2 + 0.74\lambda + 0.08$$

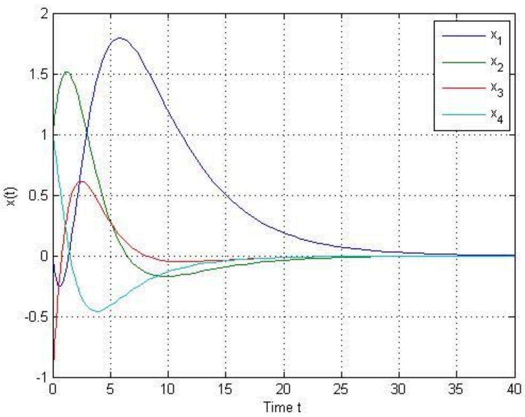
ماتریس بازخورد F با مولفه‌های متغیر براساس رابطه (۳.۷) به صورت زیر به دست می‌آید:

مولفه‌های مجهول در این ماتریس همان درایه‌های متغیر ماتریس بلوکی $\tilde{A}_\lambda$ هستند که برای به دست آوردن آن‌ها با درنظرگرفتن ماتریس بلوکی $\tilde{A}_\lambda$ و استفاده از روابط بین ضرایب چندجمله‌ای مشخصه $P(\lambda)$ و مقادیر ویژه، به یک دستگاه غیرخطی شامل چهار معادله و هشت مجهول دست می‌یابیم:

$$\begin{cases} -(g_{11} + g_{22}) = 2.5 \\ g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} - g_{13} - g_{24} = 2.16 \\ g_{22}g_{13} - g_{12}g_{23} + g_{11}g_{24} - g_{14}g_{21} = 0.74 \\ g_{13}g_{24} - g_{14}g_{23} = 0.08 \end{cases}$$

اکنون با تخصیص مقادیر دلخواه برای چهار مولفه آزاد $g_{11} = -0.5$، $g_{12} = 1$ ، $g_{13} = g_{24} = 0$ می‌توانیم مقادیر سایر مولفه‌های متغیر را از طریق حل دستگاه به دست آوریم و در نهایت ماتریس بازخورد را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$F = \begin{bmatrix} 2.13 & -0.63 & -0.4 & 0.9 \\ -1.224 & 2.064 & -1.26 & -1.9 \end{bmatrix}$$



شکل 1: تغییرات بردار حالت نسبت به زمان

$$F = D_0^{-1}(-G_0 + G_\lambda)T^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.1g_{11} + g_{12} + g_{13} + 1.98 & 0.1g_{11} - 0.1g_{12} + g_{1} \\ -0.1g_{21} + 0.1g_{22} + g_{23} - 0.98 & 0.1g_{21} - 0.1g_{22} + g_{2} \end{bmatrix}$$

۵. نتیجه‌گیری

این پژوهش با هدف بررسی چگونگی پایدارسازی نوسانگر هارمونیک با رویکرد طراحی یک کنترل‌کننده مبتنی بر بازخورد حالت در چارچوب مدل فضای حالت و نظریه کنترل انجام شد. در روشی که برای پایدارسازی نوسانگر معرفی کردیم کنترل‌کننده‌ای براساس ماتریس بازخورد حالت با مولفه‌های غیرثابت به دست آوردیم. وجود داشتن مولفه‌های غیرثابت در ماتریس بازخورد، این امکان را فراهم می‌کند تا بتوانیم به کنترل‌کننده‌ای دست پیدا کنیم که قابلیت تطبیق با شرایط عملیاتی مختلف (نظیر بهینگی، پاسخ سریع، نوسان کم و ...) داشته باشد. در این مطالعه، فقط به بررسی پایداری نوسانگر هارمونیک با استفاده از ابزارهای نظریه کنترل و مدل فضای حالت پرداختیم؛ با توجه به تنوع روش‌های کارآمد برای حل مسائل مربوط به سامانه‌هایی که در مدل فضای حالت بیان می‌شوند به عنوان پیشنهادی برای مطالعات آینده، می‌توان محاسبه یک کنترل‌کننده بهینه برای نوسانگر هارمونیک (در مدل فضای حالت) را در نظر گرفت که تابع هزینه سامانه، مشروط به برآورده کردن پایداری باشد.

منابع

[1] Wodeyar, A., Schatza, M., Widge, A. S., Eden, U. T., & Kramer, M. A. (2021). A state space modeling approach to real-time phase estimation. *Elife*, *10*, e68803.

[2] Marzban, H. R., & Razzaghi, M. (2003). Numerical solution of the controlled duffing oscillator by hybrid functions. *Applied mathematics and computation*, *140*(2-3), 179-190.

[3] Mirhosseini-Alizamini, S. M. (2017). Numerical Solution of the Controlled Harmonic Oscillator by Homotopy Perturbation Method. *Control and Optimization in Applied Mathematics*, *2*(1), 77-91.

[۴] هنرآسا، غلامرضا. (۲۰۲۱). تحول یک حالت همدوس غیرخطی در یک نوسانگر پارامتری در حضور محیط کر. *فصلنامه علمی اپتوالکترونیک*,۳(۱), ۱۶-۹.

[5] Bel, G., Alexandrov, B. S., Bishop, A. R., & Rasmussen, K. (2023). Patterns and stability of coupled multi-stable nonlinear oscillators. *Chaos, Solitons & Fractals*, *166*, 112999.

[6] Combescure, M. (1987). The quantum stability problem for time-periodic perturbations of the harmonic oscillator. In *Annales de l'IHP Physique théorique* (Vol. 47, No. 1, pp. 63-83).

[7] El-Dib, Y. O. (2024). Stability analysis of a time-delayed Van der Pol–Helmholtz–Duffing oscillator in fractal space with a non-perturbative approach. *Communications in Theoretical Physics*, *76*(4), 045003.

[8] Méndez, V., Horsthemke, W., Mestres, P., & Campos, D. (2011). Instabilities of the harmonic oscillator with fluctuating damping. *Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, *84*(4), 041137.

[9] Liu, Z., & Yuan, R. (2005). Stability and bifurcation in a harmonic oscillator with delays. *Chaos, Solitons & Fractals*, *23*(2), 551-562.

[10] Paraskevopoulos, P. N. (2017). *Modern control engineering*. CRC Press.

[11] Karbassi, S. M., & Tehrani, H. A. (2002). Parameterizations of the state feedback controllers for linear multivariable systems. *Computers & Mathematics with Applications*, *44*(8-9), 1057-1065.

[12] Karbassi, S. M., & Bell, D. J. (1994). New method of parametric eigenvalue assignment in state feedback control. *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, *141*(4), 223-226.