

**ORIGINAL ARTICLE**

# Teleportation of the Superposition of Even (Odd) Coherent States and Vacuum State

Seyede Robabeh Miry<sup>1</sup>, Fatemeh Ahmadi<sup>2\*</sup>

1 Assistant Professor, Department of Engineering Sciences and Physics, Buein Zahra Technical University, Buein Zahra, Qazvin, Iran.

2 Assistant Professor, Department of Engineering Sciences and Physics, Buein Zahra Technical University, Buein Zahra, Qazvin, Iran.

**Correspondence**

Fatemeh Ahmadi

Email: [f.ahmadi@bzte.ac.ir](mailto:f.ahmadi@bzte.ac.ir)

**How to cite**

Miry, S.R. Ahmadi, F. (2025). Teleportation of the Superposition of Even (Odd) Coherent States and Vacuum State, Optoelectronic, 7(4), 1-18.

## ABSTRACT

Quantum state teleportation plays a significant role in the field of quantum information transfer. In this article, we proposed the teleportation of a state prepared as a superposition of a coherent state and a vacuum state, using a generalized hybrid entangled state. By considering a setup that includes a beam splitter and a photon detector, and under appropriate conditions, successful teleportation of the entangled state composed of the coherent state and the vacuum state can be achieved.

Furthermore, it has been shown that when considering entangled states of even or odd coherent states and the vacuum state, the success probability significantly increases to 0.5. These results indicate that the generalized hybrid entangled state plays a crucial role in the quantum teleportation of these states.

## KEYWORDS

Generalized Hybrid Entangled State, Even and Odd Coherent States, Coherent State, Vacuum State, Quantum Teleportation.

فصلنامه علمی  
اپتوالکترونیک

«مقاله پژوهشی»

## فرابرد برهنمهی حالت‌های همدوس زوج (فرد) و حالت خلاء

سیده ربابه میری<sup>۱</sup>، فاطمه احمدی<sup>۲\*</sup>

### چکیده

فرابرد حالت‌های کوانتومی نقش بسزایی در حوزه انتقال اطلاعات کوانتومی دارد. در این مقاله، سامانه‌ای برای فرابرد برهنمهی حالت همدوس و حالت خلاء معرفی شده که در آن از حالت درهمتنیده هیبریدی تعمیم‌یافته استفاده شده است. با در نظر گرفتن مجموعه‌ای شامل شکافنده موج و آشکارسازهای فوتونی و با در نظر گرفتن شرایط مناسب، فرابرد حالتی که از برهنمهی حالت همدوس و حالت خلاء تشکیل شده با موفقیت قابل انجام است.

علاوه بر این، نشان داده شده است که اگر فرابرد حالت‌هایی را در نظر بگیریم که در حالت درهمتنیده از حالت‌های همدوس زوج یا فرد با حالت خلاء آماده شده‌اند، احتمال موفقیت به‌طور چشمگیری افزایش می‌یابد و به مقدار  $0/5$  می‌رسد. این نتایج نشان می‌دهد که حالت درهمتنیده هیبریدی تعمیم‌یافته نقش مهمی در فرابرد کوانتومی حالت‌های در نظر گرفته شده دارد.

### واژه‌های کلیدی

حالت درهمتنیده هیبریدی تعمیم‌یافته، حالت‌های همدوس زوج و فرد، حالت همدوس، حالت خلاء، فرابرد کوانتومی.

۱ استادیار، گروه علوم مهندسی و فیزیک، مرکز آموزش عالی فنی و مهندسی بوبین زهرا، بوبین زهرا، قزوین، ایران.  
۲ استادیار، گروه علوم مهندسی و فیزیک، مرکز آموزش عالی فنی و مهندسی بوبین زهرا، بوبین زهرا، قزوین، ایران.

نویسنده مسئول:

فاطمه احمدی

رایانامه: f.ahmadi@bzte.ac.ir

استناد به این مقاله:

سیده ربابه میری، فاطمه احمدی (۱۴۰۴). فرابرد برهنمهی حالت‌های همدوس زوج (فرد) و حالت خلاء. فصلنامه علمی اپتوالکترونیک، ۷(۴)، ۹-۱۸.

<https://jphys.journals.pnu.ac.ir>

## مقدمه

برهم‌نهی حالت‌های کوانتومی اهمیت ویژه‌ای در حوزه‌های مختلف پردازش اطلاعات کوانتومی دارد؛ زیرا در اکثر موارد، برهم‌نهی حالت‌ها ویژگی‌هایی متفاوت با اجزاء سازنده خود نشان می‌دهند. به بیانی دیگر، در برهم‌نهی، برخی از ویژگی‌های غیرکلاسیکی تقویت و گاهی برخی از ویژگی‌ها تضعیف می‌شوند. یکی از مهم‌ترین برهم‌نهی بین حالت‌ها، برهم‌نهی حالت‌های همدوس زوج و فرد است [۱]. حالت همدوس که یکی از اجزاء این برهم‌نهی است مرز بین کوانتوم و کلاسیک محسوب می‌شود، اما برهم‌نهی حالت‌های همدوس حاصل دارای ویژگی‌های غیرکلاسیکی پراهمیتی هستند. از این رو، پرداختن به برهم‌نهی حالت‌های کوانتومی موضوعی جذاب در حوزه‌های مختلف پردازش کوانتومی است و تحقیقات فراوانی در این زمینه انجام شده است. در همین راستا، میشرا<sup>۱</sup> و همکارانش برهم‌نهی حالت‌های همدوس زوج و فرد و حالت خلاء را مطالعه کردند [۲]. آنها دریافتند که با به‌کارگیری این برهم‌نهی خاص، برخی از ویژگی‌های غیرکلاسیکی از جمله مرتبه‌های مختلف چاندگی و آمار زیرپواسونی در مقایسه با حالت‌های همدوس زوج و فرد بهبود می‌یابد. در پی آن، نشان داده شده است که با بهره‌گیری از برهم‌نهی مورد اشاره، حساسیت به فاز کوانتومی در تداخل‌سنج ماخ-زرنر افزایش می‌یابد که در حوزه‌های اندازه‌گیری دقیق کوانتومی و سنسورهای کوانتومی نقشی تعیین‌کننده دارد [۳].

از دیگر سو، فرایندهای مختلف کوانتومی در انتقال اطلاعات به ویژه در مقیاس بزرگ نقشی اساسی دارند، که می‌تواند بستر اینترنت کوانتومی را نیز فراهم کند [۴]. علاوه بر این انتقال اطلاعات بین ماهواره‌ها یکی دیگر از استفاده‌های انتقال اطلاعات کوانتومی در مقیاس‌های بزرگ است. اما این فرآیند با چالش‌هایی مانند از دست رفتن تعداد فوتون‌ها در سامانه‌های کوانتومی به کار گرفته شده همراه است. فرابرد کوانتومی<sup>۲</sup> یکی از فرآیندهایی است که می‌تواند با غلبه بر این مشکل امکان انتقال اطلاعات کوانتومی در مقیاس‌های بزرگ را فراهم کند [۵]. تحقیقات زیادی در این زمینه در حال انجام است تا شرایط مطلوب انتقال اطلاعات کوانتومی حاصل شود [۶]. حالت‌های کوانتومی که فرابرد آنها در پژوهش‌های مختلف معرفی شده است عبارتند از حالت‌های اتمی و فوتونی [۷]، حالت‌های کوانتومی با

متغیرهای پیوسته [۸] و حالت‌های درهم‌تنیده [۹]. تاکنون، سامانه‌های مختلفی برای فرابرد کوانتومی پیشنهاد شده و مطالعه شده‌اند. از جمله آنها می‌توان به سامانه یون به دام‌افتاده [۱۰، ۱۱]، سامانه کاواک کوانتومی [۱۲-۱۴]، سامانه مدار ابررسانا [۱۵، ۱۶] و سامانه موج رونده [۱۷، ۱۸، ۶، ۷] اشاره کرد.

در تحقیقات انجام شده برای فرابرد کوانتومی، کانال کوانتومی که از یک سامانه درهم‌تنیده تشکیل شده است نقش مهمی دارد. ساختار حالت درهم‌تنیده یا کانال کوانتومی باید با حالتی که قرار است انتقال یابد، همخوانی داشته باشد. به‌عنوان نمونه برای فرابرد برهم‌نهی حالت‌های همدوس از حالت درهم‌تنیده همدوس به‌عنوان کانال کوانتومی استفاده می‌شود. بنابراین یکی از عوامل موفقیت در فرابرد کوانتومی انتخاب حالت درهم‌تنیده مناسب به عنوان کانال کوانتومی است. در همین راستا، از آنجاکه در این مقاله قصد داریم فرابرد کوانتومی برهم‌نهی حالت‌های همدوس زوج و فرد و حالت خلاء را معرفی کنیم، کانال کوانتومی یا حالت درهم‌تنیده باید شامل درهم‌تنیدگی بین حالت‌های با متغیر پیوسته و متغیر گسسته باشد. حالت‌های با متغیر گسسته عبارتند از حالت‌های عددی، حالت‌های قطبش فوتون و ویژه‌حالت‌های اتم دوترازی. از طرف دیگر، حالت همدوس و حالت چلانده مثالهایی از حالت‌های با متغیر پیوسته هستند. درهم‌تنیدگی بین زیرسامانه‌های با متغیر پیوسته و گسسته کاربردهای متنوعی در پردازش اطلاعات کوانتومی دارد. در این زمینه می‌توان به حالت درهم‌تنیده هیبریدی  $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\alpha\rangle|0\rangle + |-\alpha\rangle|1\rangle]$  اشاره کرد [۱۹]. در حالت درهم‌تنیده هیبریدی، یکی از زیرسامانه‌ها در حالت‌های همدوس  $|\alpha\rangle$  و  $|-\alpha\rangle$  و زیرسامانه دیگر در حالت‌های خلاء و حالت عددی  $|1\rangle$  قرار می‌گیرد. این حالت در محاسبات کوانتومی [۲۰] و کدگذاری کوانتومی [۲۱] استفاده شده است. به‌تازگی تعمیم جدیدی از حالت درهم‌تنیده هیبریدی معرفی شده است که در آن درهم‌تنیدگی بین حالت همدوس و حالت عددی برقرار شده است [۲۲]. اهمیت حالت تعمیم‌یافته معرفی شده این است که هر یک از زیرسامانه‌های آن در ترکیبی از حالت‌های با متغیر پیوسته (حالت همدوس) و متغیر گسسته (حالت عددی) قرار دارند و این امر می‌تواند در طراحی فرآیند فرابرد کوانتومی نقش مهمی داشته باشد. این امر در بخش‌های آینده مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در این مقاله، ابتدا با بهره‌گیری از حالت درهم‌تنیده هیبریدی تعمیم‌یافته، برای فرابرد حالتی که از برهم‌نهی حالت

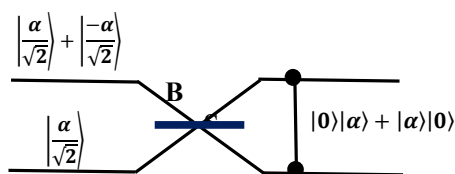
1 Mishra

2 Quantum teleportation

که  $N$ ، ضریب بهنجارش با رابطه زیر بیان می‌شود:

$$N^2 = 2(1 + e^{-|\alpha|^2}) \quad (۴)$$

حالت درهم‌تنیده هیبریدی تعمیم‌یافته در رابطه (۳) را می‌توان با استفاده از ابزارهای اپتیکی کلاسیکی ایجاد کرد. در شکل ۱ دو حالت کوانتومی که به شکافنده موج وارد می‌شوند، نشان داده شده است. شکافنده موج ابزار اپتیکی کلاسیکی است که با تاثیر روی حالت‌های کوانتومی ورودی، حالت‌های جدیدی را تولید می‌کند. این شکل یک شکافنده موج ۵۰:۵۰ را نشان می‌دهد که تاثیر آن روی حالت‌های همدوس با رابطه  $BS_{12} |\alpha\rangle_1 |\beta\rangle_2 = \left| \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{2}} \right\rangle_1 \left| \frac{\alpha-\beta}{\sqrt{2}} \right\rangle_2$  بیان می‌شود که در آن  $|\alpha\rangle_1$  و  $|\beta\rangle_2$  و  $BS_{12}$  به ترتیب بیانگر حالت‌های همدوس و شکافنده موج هستند.



شکل ۱. سامانه آماده‌سازی حالت هیبریدی تعمیم‌یافته با استفاده از شکافنده موج ۵۰:۵۰. در حالت نهایی درهم‌تنیدگی بین حالت همدوس و حالت خلاء ایجاد شده است.

حالت‌های ورودی نشان داده شده در شکل ۱ طوری انتخاب شده‌اند که با عبور از شکافنده موج ۵۰:۵۰، حالت خروجی به شکل رابطه ۳ به دست آید. با توجه به اینکه در بخش‌های آینده نیز از شکافنده موج استفاده خواهیم کرد، لازم است در اینجا اشاره کنیم که اهمیت شکافنده برای ما وسیله‌ای است برای تولید حالت‌های درهم‌تنیده مورد نظر.

حالت درهم‌تنیده هیبریدی (۱) را می‌توان به شکل‌های دیگری نیز تعمیم داد؛ از جمله، حالت‌های درهم‌تنیده به شکل زیر:

$$|\phi\rangle = \frac{1}{N} [ |N_1\rangle |\pm_2\rangle + |\pm_1\rangle |N_2\rangle ] \quad (۵)$$

که در آن رابطه به جای حالت همدوس  $|\alpha\rangle$ ، حالت همدوس زوج و حالت همدوس فرد قرار گرفته است که به ترتیب عبارتند از:

همدوس و حالت خلاء تشکیل شده و همچنین برای حالتی متشکل از برهنه‌ی حالت زوج (فرد) و حالت خلاء به طور جداگانه طرحواره‌ای معرفی می‌کنیم که در آن از شکافنده<sup>۱</sup> موج و آشکارسازهای فوتونی استفاده شده است و برای هر کدام به طور جداگانه احتمال موفقیت<sup>۲</sup> و هماندهی<sup>۳</sup> در فرابرد کوانتومی را بررسی می‌کنیم.

در ادامه ساختار مقاله بدین شرح است: در بخش بعد حالت درهم‌تنیده هیبریدی تعمیم یافته معرفی می‌شود. سپس قابلیت فرابرد برهنه‌ی حالت همدوس و خلاء بررسی می‌گردد. بعد از آن به فرابرد برهنه‌ی حالت همدوس زوج و فرد و حالت خلاء پرداخته می‌شود و در پایان نتایج به دست آمده مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد.

### حالت درهم‌تنیده هیبریدی تعمیم یافته

در این بخش ویژگی‌های حالت درهم‌تنیده هیبریدی تعمیم‌یافته را که در [۲۲] معرفی شده است، به اختصار مرور می‌کنیم. حالت زیر را در نظر بگیرید:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{N} [ |N_1\rangle |\alpha_2\rangle + |\alpha_1\rangle |N_2\rangle ] \quad (۱)$$

که در آن حالت  $|N_i\rangle$  ( $i = 1, 2$ )، حالت عددی مربوط به تعداد فوتون‌های میدان است و حالت همدوس  $|\alpha\rangle$  با رابطه زیر توصیف می‌شود:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (۲)$$

همان طور که پیشتر اشاره شد ویژگی مهم حالت (۱)، ترکیب بین حالت‌های متغیر پیوسته (حالت همدوس) و متغیر گسسته (حالت عددی) برای یک مد است.

در این مقاله رده خاصی از حالت درهم‌تنیده هیبریدی در نظر گرفته می‌شود که در آن درهم‌تنیدگی بین حالت همدوس و حالت خلاء برقرار است؛ یعنی:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{N} [ |0\rangle |\alpha\rangle + |\alpha\rangle |0\rangle ] \quad (۳)$$

1 Beam Splitter  
2 Successful probability  
3 Fidelity

شرایط مطلوب‌تری را برای فرابرد ایجاد می‌کند.

### فرابرد برهم‌نهی حالت همدوس و حالت خلاء

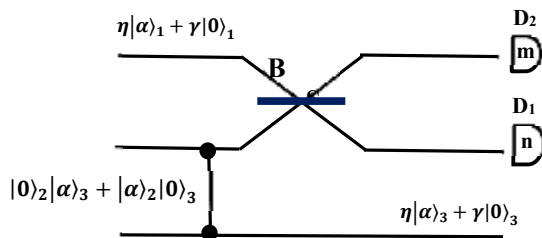
با توجه به اهمیتی که برهم‌نهی حالت‌ها در حوزه اطلاعات کوانتومی دارد، در این قسمت قابلیت فرابرد برهم‌نهی حالت همدوس و حالت خلاء را بررسی می‌کنیم. حالت درهم‌تنیده مورد نظر برای فرابرد به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$|\psi\rangle_1 = \eta |\alpha\rangle_1 + \gamma |0\rangle_1 \quad (7)$$

که در آن ضرایب  $\eta$  و  $\gamma$  مقادیری دلخواه هستند و شرط بهنجارش ( $|\eta|^2 + |\gamma|^2 = 1$ ) را برآورده می‌کنند.  $|\alpha\rangle_1$  حالت همدوس و  $|0\rangle_1$  حالت خلاء متعلق به زیرسامانه ۱ است.

در سامانه‌ای که برای فرابرد حالت (۷) آماده‌سازی شده است، حالت درهم‌تنیده تعمیم‌یافته (۳) نقش مهمی دارد. سامانه مورد نظر متشکل از شکافنده موج و حالت‌های ورودی و خروجی و آشکارسازها، در شکل ۳ نشان داده شده است. برای تحلیل اطلاعات زیرسامانه‌های ۱ و ۲، تعداد فوتون‌های این زیرسامانه‌ها باید اندازه‌گیری و اطلاعات آنها به زیرسامانه ۳ منتقل شود. در اینجا آشکارسازها باید علاوه بر تشخیص وجود و عدم وجود فوتون‌ها، در صورت حضور فوتون‌ها زوج و فرد بودن تعداد آنها را نیز مشخص کنند.

زیرسامانه ۱ در برهم‌نهی حالت همدوس و حالت خلاء قرار دارد و زیرسامانه‌های کوانتومی ۲ و ۳ در حالت درهم‌تنیده تعمیم‌یافته (۳) آماده‌سازی شده‌اند.



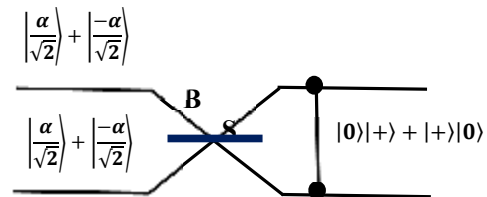
شکل ۳. سامانه کوانتومی شامل ابزارهای اپتیکی از جمله شکافنده موج و آشکارسازهای فوتونی برای فرابرد برهم‌نهی حالت همدوس و حالت خلاء.

اکنون، شرایطی فراهم می‌کنیم که زیرسامانه‌های ۱ و ۲ تحت تأثیر شکافنده موج تحول یابند. حالت نهایی سامانه پس از عبور از شکافنده، به شکل زیر می‌شود:

$$\begin{aligned} |+\rangle &= \frac{1}{\mathcal{N}_+} [|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle] \\ |-\rangle &= \frac{1}{\mathcal{N}_-} [|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle] \end{aligned} \quad (6)$$

که در آن ضریب بهنجارش حالت‌های زوج و فرد با رابطه  $\mathcal{N}_\pm^2 = 2(1 \pm e^{-2|\alpha|^2})$  بیان می‌شود.

در میان مجموعه حالت‌هایی که حالت درهم‌تنیده (۵) می‌تواند به خود بگیرد، در این مقاله درهم‌تنیدگی بین حالت همدوس زوج و حالت خلاء و درهم‌تنیدگی بین حالت همدوس فرد و حالت خلاء به طور جداگانه استفاده شده است. همان طور که در شکل ۲ نشان داده شده است با استفاده از یک شکافنده موج مشابه با آنچه در شکل ۱ توضیح داده شد، می‌توان حالت درهم‌تنیده بین حالت همدوس زوج و حالت خلاء را تولید کرد. در این سامانه کافی است ورودی‌ها در حالت همدوس زوج آماده‌سازی شوند. تأثیر عملگر شکافنده موج بر حالت‌های ورودی، به درهم‌تنیدگی بین حالت همدوس زوج و حالت خلاء منجر می‌شود.



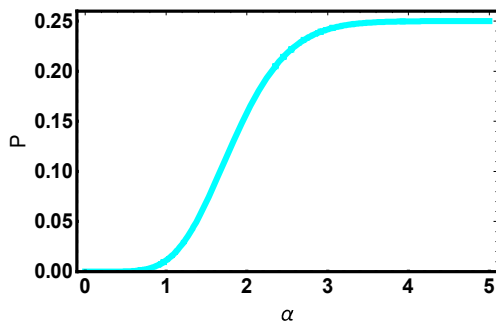
شکل ۲. سامانه آماده‌سازی حالت هیبریدی تعمیم‌یافته با استفاده از شکافنده موج ۵۰:۵۰. در حالت نهایی درهم‌تنیدگی بین حالت همدوس زوج و حالت خلاء ایجاد شده است.

اگر در شکل ۲ یکی از ورودی‌های شکافنده موج حالت همدوس زوج و ورودی دیگر حالت همدوس فرد باشد، می‌توان حالت درهم‌تنیده متشکل از حالت همدوس فرد و حالت خلاء را ایجاد کرد.

در بخش بعد به فرابرد کوانتومی با استفاده از حالت‌های معرفی شده می‌پردازیم. اما برای روشن شدن اهمیت انتخاب حالت‌های هیبریدی تعمیم‌یافته به تفاوت ویژه این حالت با سایر حالت‌های درهم‌تنیده اشاره می‌کنیم. در این حالت، هر یک از زیرسامانه‌ها می‌تواند در یک حالت کوانتومی با متغیر گسسته یا پیوسته آماده شود. این ساختار شرایط مناسبی برای فرابرد برهم‌نهی حالت همدوس و حالت خلاء به شکل  $|\psi\rangle = \eta |\alpha\rangle + \gamma |0\rangle$  را فراهم می‌کند. در بخش بعد نشان می‌دهیم که چگونه استفاده از حالت‌های همدوس زوج و فرد

است. با توجه به اینکه در فرایند فرایند کوانتومی حالتی با ضرایب ناشناس از زیرسامانه‌ای به زیرسامانه دیگر انتقال می‌یابد، چنانچه حالت ناشناس به‌طور کامل به زیرسامانه دیگر منتقل شود، فرایند فرایند به‌طور کامل تحقق می‌یابد. یعنی هماندهی حالت اولیه و حالت منتقل شده عدد یک خواهد شد.

در مثالی که ما در نظر گرفتیم اگر زیرسامانه ۱ در حالت  $|\psi\rangle_1 = \eta |\alpha\rangle_1 + \gamma |0\rangle_1$  قرار داشته باشد، چنانچه شرایطی فراهم گردد که زیرسامانه ۳ در حالت  $|\psi\rangle_3 = \eta |\alpha\rangle_3 + \gamma |0\rangle_3$  قرار بگیرد، فرایند به‌طور کامل تحقق می‌شود. ولی اگر زیرسامانه ۳ در حالت  $|\psi\rangle_3 = \eta |\alpha\rangle_3 - \gamma |0\rangle_3$  قرار بگیرد، فرایند به‌طور کامل تحقق نمی‌شود می‌توان با تاثیر عملگرهای یکانی مناسب حالت مطلوب را ایجاد کرد.



شکل ۴. احتمال موفقیت فرایند برهنه‌ی حالت همدوس و حالت خلاء بر حسب  $\alpha$

### فرایند برهنه‌ی حالت همدوس زوج (فرد) و حالت خلاء

در این قسمت نحوه فرایند برهنه‌ی حالت‌های همدوس زوج (فرد) و حالت خلاء را بررسی می‌کنیم. برای تحقق این فرایند، سامانه درهم‌تنیده باید در حالت درهم‌تنیده هیبریدی تعمیم‌یافته زیر آماده‌سازی شود:

$$|\psi\rangle_{23} = \frac{1}{\mathcal{N}} [ |0\rangle |+\rangle + |+\rangle |0\rangle ] \quad (12)$$

$$\mathcal{N}^2 = 2(1 + 4e^{-|\alpha|^2})$$

برهنه‌ی حالت همدوس زوج و حالت خلاء را در زیرسامانه کوانتومی ۱ به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$|\psi\rangle_1 = \eta |+\rangle_1 + \gamma |0\rangle_1 \quad (13)$$

که در آن ضرایب  $\eta$  و  $\gamma$  مقادیری دلخواه هستند و در شرط

$$\begin{aligned} BS_{12} |\psi\rangle_1 |\psi\rangle_{23} &= BS_{12} \frac{1}{\mathcal{N}} [\eta |\alpha\rangle_1 |0\rangle_2 |\alpha\rangle_3 + \eta |\alpha\rangle_1 |\alpha\rangle_2 |0\rangle_3 + \gamma |0\rangle_1 |0\rangle_2 |\alpha\rangle_3 + \gamma |0\rangle_1 |\alpha\rangle_2 |0\rangle_3] \\ &= \frac{1}{\mathcal{N}} \left[ \eta \left| \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle_1 \left| \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle_2 |\alpha\rangle_3 + \eta |0\rangle_1 \left| \sqrt{2}\alpha \right\rangle_2 |0\rangle_3 + \gamma |0\rangle_1 |0\rangle_2 |\alpha\rangle_3 + \gamma \left| \frac{-\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle_1 \left| \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle_2 |0\rangle_3 \right] \end{aligned} \quad (8)$$

در ادامه، هدفمان این است که زیرسامانه ۳ در برهنه‌ی حالت همدوس و حالت خلاء قرار بگیرد و فرایند فرایند از زیرسامانه ۱ به زیرسامانه ۳ تکمیل شود. یکی از سنجه‌هایی که برای ارزیابی فرایند کوانتومی به کار می‌رود، احتمال موفقیت است. برای دستیابی به احتمال موفقیت بیشتر، شرایطی را در نظر می‌گیریم که آشکارساز مستقر در انتهای مسیر ۱ تعداد فوتون‌ها را غیرصفر و به تعداد زوج اندازه بگیرد. در چنین شرایطی هماندهی این فرایند یک خواهد بود و زیرسامانه ۳ در حالت زیر قرار می‌گیرد:

$$|\psi\rangle_3 = \eta |\alpha\rangle_3 + \gamma |0\rangle_3 \quad (9)$$

یعنی حالت مورد نظر بدون تغییر انتقال می‌یابد. در این شرایط احتمال موفقیت برابر است با:

$$P_n = \frac{e^{-|\alpha|^2/2} \alpha^{2n}}{\mathcal{N} 2^n n!}$$

$$P = \sum_{n \neq 0 \text{ and even}} P_n \quad (10)$$

احتمال موفقیت P برای تمامی حالت‌های با n زوج در شکل ۴ رسم شده است. با توجه به شکل درمی‌یابیم که به‌ازای مقادیر  $\alpha$  بزرگ‌تر از ۳ احتمال موفقیت به ۰/۲۵ می‌رسد که در حوزه فرایند کوانتومی این مقدار قابل قبول است. از طرف دیگر، چنانچه تعداد فوتون‌های رسیده به آشکارساز  $D_1$  غیرصفر و فرد باشد، حالت زیرسامانه ۳ به‌صورت زیر درخواهد آمد:

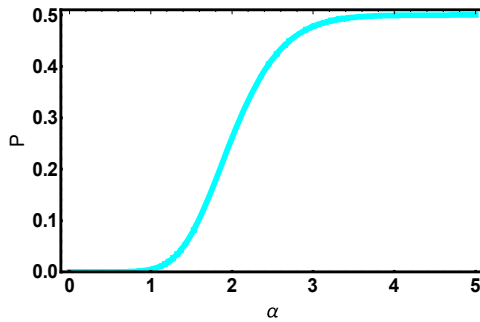
$$|\psi\rangle_3 = \eta |\alpha\rangle_3 - \gamma |0\rangle_3 \quad (11)$$

که نشان می‌دهد فرایند فرایند به‌طور کامل تحقق نشده

می‌یابد. احتمال موفقیت در این فرایند به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$P_{nm} = \frac{4 * e^{-|\alpha|^2}}{\mathcal{N}} \frac{\alpha^{2n}}{2^n n!} \frac{\alpha^{2m}}{2^m m!} \quad (۱۶)$$

$$P = \sum_{n, m \neq 0 \text{ and even}} P_{nm}$$



شکل ۵. احتمال موفقیت فرایند برهمنهی حالت همدوس زوج و حالت خلاء بر حسب  $\alpha$

رابطه (۱۶) یعنی احتمال موفقیت فرایند فرایند کوانتومی در حالتی که برهمنهی حالت زوج و خلا را داشته باشیم در شکل ۵ بر حسب پارامتر  $\alpha$  رسم شده است. ملاحظه می‌شود به ازای مقادیر  $\alpha$  بزرگ‌تر از ۳ احتمال موفقیت به مقدار ۰/۵ می‌رسد که مقدار مطلوبی است و دو برابر احتمال موفقیت در سامانه طراحی شده برای برهمنهی همدوس و خلا است که در بخش قبل معرفی شد.

حال اگر آشکارسازهای ۱ و ۲ تعداد فوتون‌ها را فرد اندازه بگیرند، حالت نهایی زیرسامانه ۳ به شکل  $|\psi\rangle_3 = \eta |+\rangle_3 - \gamma |0\rangle_3$  تبدیل می‌شود و فرایند فرایند به‌طور کامل برقرار نخواهد شد.

با فرایندی مشابه می‌توان برهمنهی حالت همدوس فرد و حالت خلاء یا به عبارتی  $|\psi\rangle_1 = \eta |-\rangle_1 + \gamma |0\rangle_1$  را نیز از زیرسامانه‌ای کوانتومی به زیرسامانه کوانتومی دیگر منتقل کرد. در این فرایند، حالت درهم‌تنیده هیبریدی تعمیم‌یافته مناسب به‌شکل زیر است:

$$|\psi\rangle_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}} [ |0\rangle |-\rangle + |-\rangle |0\rangle ] \quad (۱۸)$$

چنانچه تأثیر عملگر شکافنده موج را بر زیرسامانه‌های ۱ و ۲ در نظر بگیریم به نتیجه زیر خواهیم رسید:

به‌نحارش  $(|\eta|^2 + |\gamma|^2 = 1)$  صدق می‌کنند. چنانچه شکافنده موج بر زیرسامانه‌های ۱ و ۲ اثر کند، حالت نهایی سامانه به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} & BS_{12} |\psi\rangle_1 |\psi\rangle_{23} \\ &= BS_{12} \frac{1}{\mathcal{N}} [\eta |+\rangle_1 |0\rangle_2 |+\rangle_3 \\ &+ \eta |+\rangle_1 |+\rangle_2 |0\rangle_3 + \gamma |0\rangle_1 |0\rangle_2 |+\rangle_3 \\ &+ \gamma |0\rangle_1 |+\rangle_2 |0\rangle_3] \\ &= \frac{1}{\mathcal{N}} \left[ \eta \left[ \left| \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle_1 \left| \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle_2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left| \frac{-\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle_1 \left| \frac{-\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle_2 \right] |+\rangle_3 \right. \\ &+ \eta |0\rangle_1 (|\sqrt{2}\alpha\rangle_2 + |-\sqrt{2}\alpha\rangle_2) |0\rangle_3 \\ &+ \eta (|\sqrt{2}\alpha\rangle_1 + |-\sqrt{2}\alpha\rangle_1) |0\rangle_2 |0\rangle_3 \\ &+ \gamma |0\rangle_1 |0\rangle_2 |\alpha\rangle_3 \\ &\left. + \gamma \left[ \left| \frac{-\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle_1 \left| \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle_2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left| \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle_1 \left| \frac{-\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle_2 \right] |0\rangle_3 \right] \end{aligned} \quad (۱۴)$$

مطابق با شکل ۳ مقادیر فوتون‌های آشکار شده در مسیرهای ۱ و ۲ را به‌ترتیب با  $n$  و  $m$  نامگذاری می‌کنیم. در شرایطی که مقادیر فوتون‌های آشکار شده غیر صفر باشد، رابطه نهایی زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} & BS_{12} |\psi\rangle_1 |\psi\rangle_{23} \\ &= \frac{1}{\mathcal{N}} \left[ e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n,m} \frac{\alpha^n}{\sqrt{2^n n!}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{2^n n!}} (1 \right. \\ &+ (-1)^{n+m} |n\rangle_1 |m\rangle_2 \Big] \eta |+\rangle_3 \\ &+ \frac{1}{\mathcal{N}} \left[ e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n,m} \frac{\alpha^n}{\sqrt{2^n n!}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{2^n n!}} ((-1)^n \right. \\ &\left. + (-1)^m) |n\rangle_1 |m\rangle_2 \Big] \gamma |0\rangle_3 \end{aligned} \quad (۱۵)$$

ملاحظه می‌کنیم که اگر  $n$  و  $m$  غیر صفر باشد، تنها دو حالت ممکن است؛ یا  $n$  و  $m$  هر دو زوج و یا هر دو فرد هستند. در غیر این صورت ضرایب صفر خواهند شد.

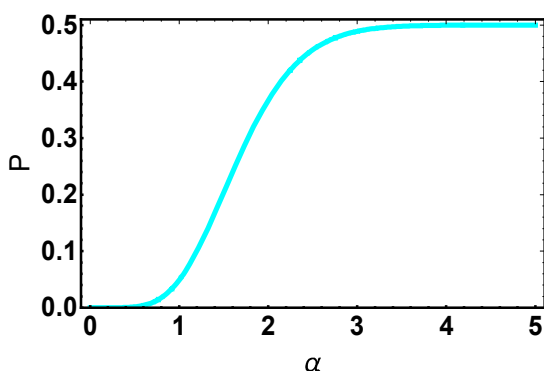
اگر تعداد فوتون‌ها در هر دو مسیر زوج باشد، حالت زیرسامانه کوانتومی ۳ در برهمنهی حالت همدوس زوج و حالت خلاء به صورت  $|\psi\rangle_3 = \eta |+\rangle_3 + \gamma |0\rangle_3$  قرار می‌گیرد و فرایند از زیرسامانه ۱ به زیرسامانه ۳ به‌طور کامل تحقق

احتمال موفقیت این فرایند به شکل زیر به دست می‌آید:

$$P_{nm} = \frac{4 * e^{-|\alpha|^2}}{2} \frac{\alpha^{2n}}{2^n n!} \frac{\alpha^{2m}}{2^m m!} \quad (21)$$

$$P = \sum_{n \neq 0} \sum_{n \text{ even}} \sum_{m \text{ odd}} P_{nm}$$

در شکل ۶ احتمال موفقیت فرایند فرابرد برحسب پارامتر  $\alpha$  رسم شده است. نمودار به دست آمده با نتایج حاصل از شکل ۵ همخوانی دارد و احتمال موفقیت به مقدار مطلوب ۰/۵ می‌رسد.



شکل ۶. احتمال موفقیت فرابرد برهنه‌ی حالت همدوس فرد و حالت خلاء بر حسب  $\alpha$

این نتیجه جالب توجه است که احتمال موفقیت فرایند فرابرد برهنه‌ی حالت همدوس فرد یا زوج و حالت خلاء دو برابر زمانی است که سعی می‌کنیم برهنه‌ی حالت همدوس و حالت خلاء را منتقل کنیم. در این قسمت به توضیح دقیق‌تر آن می‌پردازیم. فرابرد برهنه‌ی حالت همدوس زوج و حالت خلاء زمانی به طور کامل محقق می‌شود که در مرحله نهایی هر دو آشکارساز فوتون‌های زیرسامانه‌های ۱ و ۲ را غیرصفر و زوج اندازه بگیرند. در شرایطی که هر دو فوتون غیرصفر باشند تنها دو احتمال برای تعداد فوتون‌های زیرسامانه‌های ۱ و ۲ وجود دارد (هر دو فوتون زوج و یا هر دو فوتون فرد) و بر این اساس، احتمال موفقیت این فرایند به مقدار مطلوب ۰/۵ می‌رسد. از طرف دیگر، در فرابرد برهنه‌ی حالت همدوس فرد و حالت خلاء زیرسامانه‌های ۲ و ۳ باید در حالت درهم‌تنیده هیبریدی تعمیم‌یافته به صورت  $|\psi\rangle_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}} [ |0\rangle_2 |-\rangle_3 + |-\rangle_2 |0\rangle_3 ]$  شکافنده موج، لازم است شرایطی را در نظر بگیریم که هر دو فوتون زیرسامانه‌های ۱ و ۲ غیرصفر باشند. با تحلیل روابط درمی‌یابیم که فرابرد زمانی به طور کامل تحقق می‌یابد که در مرحله نهایی تعداد فوتون‌های زیرسامانه ۱ زوج و تعداد

$$BS_{12} |\psi\rangle_1 |\psi\rangle_{23}$$

$$= BS_{12} \frac{1}{\sqrt{2}} [\eta |-\rangle_1 |0\rangle_2 |-\rangle_3$$

$$+ \eta |-\rangle_1 |-\rangle_2 |0\rangle_3 + \gamma |0\rangle_1 |0\rangle_2 |-\rangle_3$$

$$+ \gamma |0\rangle_1 |-\rangle_2 |0\rangle_3]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \eta \left[ \left| \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle_1 \left| \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle_2 - \left| \frac{-\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle_1 \left| \frac{-\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle_2 \right] |-\rangle_3 \right. \quad (19)$$

$$+ \eta |0\rangle_1 (|\sqrt{2}\alpha\rangle_2 + |-\sqrt{2}\alpha\rangle_2) |0\rangle_3$$

$$- \eta (|\sqrt{2}\alpha\rangle_1 + |-\sqrt{2}\alpha\rangle_1) |0\rangle_2 |0\rangle_3$$

$$+ \gamma |0\rangle_1 |0\rangle_2 |\alpha\rangle_3$$

$$+ \gamma \left[ \left| \frac{-\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle_1 \left| \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle_2 - \left| \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle_1 \left| \frac{-\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle_2 \right] |0\rangle_3 \Big]$$

همانند مراحل قبلی مقادیر فوتون‌های آشکار شده در مسیرهای ۱ و ۲ را به ترتیب با  $n$  و  $m$  نامگذاری می‌کنیم. چنانچه مقادیر فوتون‌های  $n$  و  $m$  هر دو غیرصفر باشد رابطه (۱۹) به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$BS_{12} |\psi\rangle_1 |\psi\rangle_{23}$$

$$= \frac{1}{\mathcal{N}} \left[ e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n,m} \frac{\alpha^n}{\sqrt{2^n n!}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{2^n n!}} (1 \right. \quad 20$$

$$- (-1)^{n+m}) |n\rangle_1 |m\rangle_2 \Big] \eta |-\rangle_3$$

$$+ \frac{1}{\mathcal{N}} \left[ e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n,m} \frac{\alpha^n}{\sqrt{2^n n!}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{2^n n!}} ((-1)^n$$

$$- (-1)^m) |n\rangle_1 |m\rangle_2 \Big] \gamma |0\rangle_3 \right]$$

رابطه ۲۰ نشان می‌دهد دو حالت امکان‌پذیر است:  $n$  زوج و  $m$  فرد و حالت دوم  $n$  فرد و  $m$  زوج. اگر تعداد هر دو فوتون زوج و یا هر دوی آنها فرد باشند، ضرایب صفر خواهند شد. اگر  $n$  زوج و  $m$  فرد باشد، زیرسامانه کوانتومی ۳ در برهنه‌ی حالت همدوس فرد و حالت خلاء قرار می‌گیرد و فرابرد از زیرسامانه ۱ به زیرسامانه ۳ به طور کامل با حالت فرابرد  $|\psi\rangle_3 = \eta |-\rangle_3 + \gamma |0\rangle_3$  تحقق می‌یابد. ولی اگر تعداد فوتون‌های زیرسامانه ۱ فرد و زیرسامانه ۲ زوج باشد، فرابرد با انتقال حالت  $|\psi\rangle_3 = \eta |-\rangle_3 - \gamma |0\rangle_3$  به طور کامل تحقق نمی‌یابد.

۲ می‌شود. در این مرحله چنانچه آشکارساز فوتونی تعداد فوتون‌های زیرسامانه ۱ را غیرصفر و زوج اندازه بگیرد، فرایند فرابرد از زیرسامانه ۱ به زیرسامانه ۳ به‌طور کامل تحقق می‌یابد. احتمال موفقیت این فرایند  $0.25$  است که در حوزه فرابرد حالت‌های کوانتومی مقداری مورد پذیرش است.

علاوه بر این نشان داده شد که با بهره‌گیری از سامانه مشابه می‌توان برهم‌نهی حالت هم‌دوس زوج و حالت خلاء را از زیرسامانه ۱ به زیرسامانه ۳ منتقل کرد. در این سامانه، پس از تأثیر شکافنده موج، چنانچه آشکارسازهای فوتونی مقادیر فوتون‌های زیرسامانه‌های ۱ و ۲ را غیرصفر و زوج اندازه بگیرند، فرابرد به‌طور کامل انجام می‌گیرد. احتمال موفقیت این فرایند برای مقادیر بزرگ  $\alpha$  به مقدار  $0.5$  می‌رسد که مقداری مطلوب است. با فرایندی مشابه، فرابرد برهم‌نهی حالت هم‌دوس فرد و خلاء نیز بررسی شده است و نشان داده شده که این فرایند هم با احتمال موفقیت مطلوب  $0.5$  قابل تحقق است.

لذا با داشتن احتمال موفقیت مطلوب  $0.5$  می‌توان امیدوار بود که حالت‌های درهم‌تنیده هیبریدی تعمیم‌یافته در فرابرد کوانتومی و انتقال اطلاعات در مقیاس بزرگ استفاده شوند.

فوتون‌های زیرسامانه ۲ فرد اندازه‌گیری شود. در این حالت نیز تنها دو احتمال برای تعداد فوتون‌های زیرسامانه‌های ۱ و ۲ وجود دارد و این امر منجر به احتمال موفقیت مطلوب  $0.5$  می‌شود.

## نتیجه‌گیری

در این پژوهش سامانه‌هایی برای فرابرد برهم‌نهی حالت هم‌دوس و حالت خلاء و همچنین برهم‌نهی حالت هم‌دوس زوج (فرد) و حالت خلاء پیشنهاد شده است. در سامانه‌های معرفی شده، حالت درهم‌تنیده هیبریدی تعمیم‌یافته به‌کار گرفته شده است. اهمیت حالت درهم‌تنیده هیبریدی تعمیم‌یافته بدان سبب است که هریک از زیرسامانه‌های آن در ترکیبی از حالت کوانتومی با متغیر پیوسته و متغیر گسسته قرار دارند.

سامانه معرفی شده برای فرابرد برهم‌نهی حالت هم‌دوس و حالت خلاء شامل شکافنده موج و آشکارساز فوتونی است. در این سامانه، برهم‌نهی حالت هم‌دوس و خلاء در زیرسامانه ۱ در نظر گرفته شده است و زیرسامانه‌های ۲ و ۳ در حالت درهم‌تنیده هیبریدی تعمیم‌یافته قرار دارند. شکافنده موج در موقعیتی قرار گرفته است که سبب تحول زیرسامانه‌های ۱ و

## References

- [1] V. V. Dodonov, I. A. Malkin, and V. I. Manko, "Even and odd coherent states and excitations of a singular oscillator," *Physica* 72 597 (1974)
- [2] K. K. Mishra, D. Yadav, G. Shukla and D. K. Mishra, "Non-classicalities exhibited by the superposition of Schrödinger's cat state with the vacuum of the optical field" *Phys. Scr.* 96 045102 (2021)
- [3] G. Shukla, K. M. Mishra, A. K. Pandey, T. Kumar, H. Pandey, D. K. Mishra, "Improvement in phase-sensitivity of a Mach-Zehnder interferometer with the superposition of Schrödinger's cat-like state with vacuum state as an input under parity measurement" *Optical and Quantum Electronics* 55, 460 (2023)
- [4] Kimble, H. The quantum internet. *Nature* 453, 1023-1030 (2008)
- [5] C. Bennett, G. Brassard, C. Crepeau, R. Jozsa, A. Peres, and W. K. Wootters, "Teleportation of Quantum States" *Phys. Rev. Lett.* 70 189 (1993)
- [6] J. M. Thomas, F. I. Yeh, J. H. Chen, J. J. Mambretti, S. J. Kohlert, G. S. Kanter, and P. Kumar, Quantum teleportation coexisting with classical communications in optical fiber, *Optica* 11 1700 (2024)
- [7] J. M. Liu and B. Weng, "Approximate teleportation of an unknown atomic state in the

## منابع

- two-photon Jaynes-Cummings model " *Physica A* 367 215 (2006)
- [8] S. J. van Enk, and O. Hirota, "Entangled coherent states: Teleportation and decoherence", *Phys. Rev. A* 64 022313 (2001)
- [9] X. G. Wang, "Quantum teleportation of entangled coherent states" *Phys. Rev. A* 64 022302 (2001)
- [10] E Solano, C L Cesar, R. L. de Matos Filho and N. Zagury, Reliable teleportation in trapped ions, *Eur. Phys. J. D* 13 121 (2001)
- [11] L. Song and R Y Chen, "The scheme of quantum teleportation using four-qubit cluster state in trapped ions", *Int. J. Theor. Phys.* 54 421 (2015)
- [12] N. G. de Almeida, L. P. Maia, C. J. Villas-Bôas and M. H. Y. Moussa, "One-cavity scheme for atomic-state teleportation through GHZ states", *Phys. Lett. A* 241 213 (1998)
- [13] N. Sehati and M. K. Tavassoly, "Approximate conditional teleportation of a  $\Lambda$ -type three-level atomic state based on cavity QED method beyond Bell-state measurement", *Quantum Inf. Process.* 16 193 (2017)
- [14] R. Pakniat, M. K. Tavassoly and M. H. Zandi, "Entanglement swapping and teleportation based on cavity QED method using the nonlinear atom-field interaction: cavities with a hybrid of coherent and number states" *Opt. Commun.* 382 381 (2017)
- [15] M. Baur, A. Fedorov, L. Steffen, S. Filipp, M. P.

- Da Silva and A. Wallraff, “Benchmarking a quantum teleportation protocol in superconducting circuits using *tomography and an entanglement witness*”, *Phys. Rev. Lett.* 108 040502 (2012)
- [16] S. Salimian, M. K. Tavassoly, N. Sehati, “Quantum teleportation of the entangled superconducting Qubits via LC resonators” *International Journal of Theoretical Physics* 62 85 (2023)
- [17] N. Takei, T. Aoki, S. Koike, K. I. Yoshino, K. Wakui, H. Yonezawa, T. Hiraoka, J. Mizuno, M. Takeoka, M. Ban, and A. Furusawa, “Experimental demonstration of quantum teleportation of a squeezed state”, *Phys. Rev. A* 72 042304 (2005)
- [18] N. B. An, “Teleportation of a general two-mode coherent-state superposition via attenuated quantum channels with ideal and/or threshold detectors”, *Physics Letters A* 373 1701 (2009)
- [19] K. Nemoto and W. J. Munro, *Phys. Rev. Lett.* 93 250502 (2004); H. Jeong, “Using weak nonlinearity under decoherence for macroscopic entanglement generation and quantum computation”, *Phys. Rev. A* 72 034305 (2005)
- [20] S.W. Lee and H. Jeong, “Near-deterministic quantum teleportation and resource-efficient quantum computation using linear optics and hybrid qubits”, *Phys. Rev. A* 87 022326 (2013)
- [21] J. Rigas, O. Guhne, N. Lutkenhaus, “Entanglement verification for quantum-key-distribution systems with an underlying bipartite qubit-mode structure”, *Phys. Rev. A* 73 012341 (2006)
- [22] G. Ren, H. J. Yu, C. Z. Zhang, F. Chen, “Nonclassical Properties of a Hybrid NAAN Quantum State,” *International Journal of Theoretical Physics* 62 81 (2023)