

**ORIGINAL ARTICLE****Investigation of nonlinear dynamics and stability analysis of Dust Acoustic shock waves in a quantum dusty plasma**

Correspondence

Email:

How to cite

**ABSTRACT**

Using quantum hydrodynamic (QHD) model, dust acoustic (DA) shock waves are studied in a quantum dusty plasma containing degenerate electrons, ions and negatively charged dust grains. Employing the reductive perturbation technique, a Kortweg-de Vries-Burgers (KdVB) equation is derived and solved theoretically and numerically. The hyperbolic tangent (tanh) method is used for theoretical solution. One of the most convenient approaches for solving the nonlinear partial differential equation in dispersive and dissipative system is the tanh method. The KdVB equation is solved numerically by fourth-order Runge – Kutta method. It is found that when dissipation dominates over dispersion, monotonic shock structure is formed, while in case of small dissipation, oscillatory shock profile is created. The influence of viscosity on DA shock waves shows that shock thickness is enhanced with the increase in viscosity. Additionally, the number and height of oscillatory shocks get increased by decreasing the viscosity. The solutions of the KdVB equation is studied in a frame moving with the phase velocity of the wave. Considering the boundary conditions, the nonlinear obtained equation is rewritten in the form of a dynamical system. In the  $(F, Z)$  plane, this system has two fixed points. Investigating the eigen values corresponding to these fixed points indicate that one point is always a saddle, while the other one is either a stable focus or stable node. The phase plane analysis shows that the decrease in the number of spirals show increase in dissipation.

**KEYWORDS**

Quantum hydrodynamic model, Dust acoustic shock waves, Quantum dusty plasma, Reductive perturbation technique.

فصلنامه علمی  
اپتوالکترونیک

«مقاله پژوهشی»

## بررسی دینامیک غیرخطی و آنالیز پایداری امواج ضربه غبار صوتی در یک پلاسمای غباری کوانتومی

1

### چکیده

در این مقاله با استفاده از مدل درودینامیک کوانتومی به بررسی دینامیک غیر خطی و آنالیز پایداری امواج ضربه غبار صوتی در یک پلاسمای غباری کوانتومی شامل الکترون‌های تبهگن، یون‌ها و ذرات غبار منفی، پرداخته شده است. با استفاده از روش اختلال کاهشی یک معادله کورته-وگ دوریز-برگر (KdVB) به دست آمده و سپس جواب این معادله به دو روش تحلیلی و عددی حل شده است. برای حل تحلیلی از روش تانژانت استفاده شده است. این روش زمانی که معادله شامل هر دو اثر پراکندگی و اتلاف است، مناسب می‌باشد. حل عددی معادله KdVB با استفاده از روش عددی رنگ-کوتا مرتبه چهارم انجام می‌شود. نتایج نشان می‌دهد اگر اتلاف در محیط غلبه کند، امواج ضربه ای که ظاهر می‌شوند به صورت یکنواخت هستند و در مورد اتلاف ضعیف، امواج ضربه نوسانی ایجاد می‌گردند. تاثیر ویسکوزیته بر روی این امواج مورد بررسی قرار گرفته و نتایج نشان می‌دهد، با افزایش ویسکوزیته، ضخامت موج ضربه یکنواخت افزایش می‌یابد. به علاوه در موج ضربه نوسانی، تعداد و ارتفاع نوسانات با کاهش ویسکوزیته افزایش یافته است. سپس به بررسی جواب‌های این معادله در دستگاه متحرکی که با سرعت فاز موج حرکت می‌کند، پرداخته شده است. با در نظر گرفتن شرایط مرزی، معادله غیرخطی حاصل به شکل یک سیستم دینامیکی بازنویسی می‌شود. این سیستم در صفحه فضای فاز  $(F, Z)$  دو نقطه ثابت دارد. بررسی ویژه مقادیر متناظر با این نقاط ثابت نشان می‌دهد که یک نقطه همیشه زینی است و دیگری یا یک نقطه کانونی پایدار است و یا یک گره پایدار. بررسی پیکره فازی سیستم دینامیکی نشان می‌دهد کاهش تعداد مارپیچ‌ها متناظر با افزایش اتلاف است.

### واژه‌های کلیدی

مدل درودینامیک کوانتومی، امواج ضربه غبار صوتی، پلاسمای غباری کوانتومی، روش اختلال کاهشی.

نویسنده مسئول:  
رایانامه:

استناد به این مقاله:

## مقدمه

افزایش دمای یک گاز معمولی متشکل از اتم‌های خنثی و مولکول‌ها، منجر به افزایش انرژی جنبشی الکترون‌ها و فرار آن‌ها شده و یونیزاسیون رخ می‌دهد. در این صورت، سیستم حاصل پلاسما نامیده می‌شود. در این گونه پلاسماها، قوانین نیوتن و توزیع آماری ماکسول-بولتزمن حاکم هستند. طول موج براگ که به جرم ذرات و انرژی گرمایی وابسته است در پلاسماهای کلاسیکی نقشی ندارد زیرا در مقایسه با فواصل میان ذره‌ای متوسط بسیار کوچک است. در این حالت چگونگی همپوشانی در توابع موج وجود نخواهد داشت و اثرات کوانتومی قابل اغماض هستند.

در دهه‌های بعد سیستم‌های بس ذره‌ای گازی شکلی از الکترون‌ها در محیط‌های کاملاً متفاوتی از قبیل نیمه هادی‌ها و الکترون‌ها در فلزات یافت شدند که در آنها ماسه‌ت کوانتومی الکترون‌ها کاملاً پدیدار شده بود. در این نوع پلاسماها توزیع آماری فرمی-دیراک حاکم است و اثرات مکانیک کوانتومی قابل اغماض نخواهند بود. این نوع پلاسماها با چگالی‌های عددی بالا و دماهای پایین در مقایسه با پلاسماهای کلاسیکی با چگالی پایین و دماهای بالا مشخص می‌شوند. چنین پلاسماهایی می‌توانند در اجسام اختریفیزیکی مانند ستاره‌های نوترونی، کوتوله‌های سفید و مگنتارها یافت شوند؛ برای مثال چگالی درون ستاره‌های نوترونی می‌تواند به بیش از  $10^{36} \text{ cm}^{-3}$  هم برسد. پلاسماهای تولید شده در آزمایشگاه‌ها به وسیله تکنیک‌های تراکمی از جمله هدایت کردن امواج ضربه‌ای، لیزرها یا پرتوهای یونی، از جمله پلاسماهای با چگالی بالا [1] هستند. مطالعه اثرات جمعی در این چگالی‌ها بسیار پیچیده است. انواع مختلفی از ناهمانی‌ها و همبستگی‌ها منجر به افزایش پیچیدگی‌هایی در مطالعه این نوع پلاسماها می‌شوند. همچنین اثرات مکانیک کوانتومی نمی‌توانند نادیده گرفته شوند و تعداد زیادی از پدیده‌های غیر رایج مانند تونل زنی الکترون‌ها، فشار یونیزاسیون، تراکم و بلورسازی هم می‌توانند با اهمیت باشند. اگرچه دمای پلاسماهای چگال نجومی بالاست اما هنوز اثرات کوانتومی به واسطه اصل طرد پاولی قابل اغماض نیست [2, 3].

روش‌های ریاضی شناخته شده شرویدینگر-پواسون و ویگنر-پواسون، به طور وسیعی برای مطالعه رفتارهای درودینامیکی و آماری ذرات پلاسما در مقیاس‌های کوانتومی مورد استفاده قرار می‌گیرند. این روش‌ها مشابه مدل‌های سیالی و جنبشی در فیزیک پلاسماهای کلاسیکی هستند [4, 5]. مدل درودینامیک کوانتومی (QHD) نیز یکی دیگر از مدل‌های

ریاضی برای مطالعه پلاسماهای کوانتومی می‌باشد که در واقع یک مدل کاهش یافته از دو مدل قبلی است. این مدل، اجازه بررسی مستقیم دینامیک جمعی را بدون بررسی پیچیدگی‌های مدل شرویدینگر-پواسون و مدل ویگنر-پواسون، می‌دهد [6]. هر دو مدل شرویدینگر-پواسون و ویگنر-پواسون، با استفاده از تعریف‌های استاندارد ماکروسکوپیکی یا کمیت‌های متوسط گیری شده مانند چگالی، سرعت، فشار و غیره، منجر به مجموعه معادلات QHD می‌شوند. به عبارت دیگر هر دوی این روش‌های ریاضی نتایج یکسانی ایجاد می‌کنند که حاصل یک مدل ساده شده است که همان QHD خواهد بود.

اضافه شدن که ذرات باردار سنگین به پلاسما، زمینه جالب توجه دیگری در فیزیک پلاسما ایجاد می‌کند. در محیط پلاسما، تقریباً هر ماده ناخالصی را می‌توان به عنوان غبار در نظر گرفت. پلاسماهای غباری در جهان ما و در منظومه شمسی وجود دارند؛ در نزدیکی اتمسفر زمین و مزوسفر به شکل نانوذرات آئروسول و ذرات یخ، در حلقه‌های غبار سیاراتی مانند زحل و نپتون، در اتمسفر مریخ، در انتهای کمان ستاره‌های دنباله دار، بر سطح ماه، در محیط‌های نجومی به شکل غبار بین ستاره‌ای و اطراف خوشه‌های کهکشان‌ها. در سطح زمین این ذرات در خروجی سفینه‌های فضایی و موشک‌ها، در پلاسماهای پردازشی مورد استفاده در صنعت مانند ریزتراشه‌ها و در پلاسماهای آزمایشگاه‌ها دما پایین مانند تخلیه‌های رادیوفرکانسی وجود دارند. مشاهدات تجربی نشان می‌دهد محدوده اندازه ذرات غبار، از نانومتر تا میلی‌متر را دربرمی‌گیرد [8] و بار و جرم ذرات بر اساس اندازه ذرات تغییر می‌کنند. ذرات باردار موجود در پلاسما به صورت کاتوره‌ای در حال حرکت هستند. این ذرات تحت تاثیر نیروهای الکترومغناطیسی با یکدیگر برهمکنش می‌کنند. در نتیجه این رفتار، پدیده‌های موجی جمعی گوناگونی به واسطه حرکت مربوط به ذرات پلاسما به وجود می‌آیند. همانطور که می‌دانیم پلاسماهای الکترون-یون هر دو موج طولی و عرضی را پشتیبانی می‌کند. حضور یک میدان مغناطیسی خارجی احتمال ایجاد امواج طولی و عرضی مختلفی را فراهم می‌کند.

هنگامی که ذرات غبار خنثی به یک پلاسماهای الکترون-یون اضافه می‌شوند، در اثر فرایندهای گوناگونی باردار می‌شوند. حضور ذرات غبار باردار شده می‌تواند باعث اصلاح و یا حتی کنترل انتشار امواج در پلاسما شوند [9]. حضور این ذرات سنگین در پلاسما منجر به انتشار امواج با فرکانس‌های پایین مانند امواج غبار صوتی [10]، غبار یون صوتی [11] و امواج ضربه غبار صوتی [12-14] می‌شوند. به دلیل کاربردهای

فراوان این امواج، به دو صورت تئوری و تجربی مطالعه شده‌اند. سرعت فاز این امواج خیلی کمتر از سرعت حرارتی الکترون‌ها و یون‌ها است. بر همین اساس الکترون‌های بدون اینرسی و یون‌ها، در پتانسیل امواج غبار صوتی، تعادل ایجاد می‌کنند. در امواج غبار یون صوتی، دینامیک یون‌ها با اهمیت است؛ به عبارت دیگر اینرسی توسط یون‌ها تأمین می‌شود و نیروی بازگرداننده از فشار الکترون‌های بدون جرم ناشی می‌شود. شرط خنثی بودن بار نیز در حالت تعادل توسط ذرات غبار ثابت برقرار می‌شود. در حالی که در مورد امواج غبار صوتی، دینامیک ذرات غبار باید در نظر گرفته شود زیرا اینرسی توسط ذرات غبار فراهم شده و انرژی بازگرداننده از فشار ناشی از الکترون‌های بدون اینرسی و یون‌ها تأمین می‌شود.

هنگامی که یک پلاسما ی غباری بسیار سرد می‌شود، طول موج براگ حامل‌های بار با ابعاد سیستم، قابل مقایسه خواهد شد. در این حالت پلاسما ی غباری مانند یک گاز فرمی رفتار کرده و اثرات مکانیک کوانتومی نقش بسزایی در دینامیک ذرات باردار خواهد داشت. مواد بسیار ریز از جمله میکرو و نانو ساختارهای فلزی و نیمه هادی مانند سیستم‌های نانو الکترومکانیکی در پلاسماهای چگال می‌توانند مانند ذرات غبار رفتار کنند. به طور مشابه نانوتیوب‌ها یا نانوذرات فلزی می‌توانند به عنوان ذرات غبار باردار شده که توسط الکترون‌های تپه‌گن، حفره‌ها و یون‌های غیرتپه‌گن احاطه شده اند، در نظر گرفته شوند [15]. چگالی الکترون‌ها در فلزات بسیار زیاد است؛ در حدود  $10^{23} \text{ cm}^{-3}$ . دینامیک الکترون‌ها و حفره‌ها همانند دینامیک کوانتومی در طبیعت است زیرا طول موج براگ مربوط به آن‌ها حائز اهمیت می‌باشد. اثرات کوانتومی مربوط به گاز فرمی چگال الکترونی در حضور ساختارهای نانومتری در سیستم آزمایشگاه یا ذرات باردار سنگین (غبار) در محیط‌های نجومی (مانند ابرنواخترها)، به شدت دینامیک امواج را تحت تاثیر قرار خواهند داد [15-17]. در محدوده دامنه‌های کوتاه، امواج در پلاسما معمولاً به صورت خطی رفتار می‌کنند، اما با افزایش دامنه این امواج، فرایندهای گوناگونی رخ می‌دهد که دیگر توسط تئوری‌های خطی قابل توصیف نیستند. یک اثر مهم غیرخطی این است که قسمت هایی از موج که دامنه بزرگتری دارند، سریعتر از قسمت‌های با ارتفاع کمتر حرکت می‌کنند و این اثر موجب واژگونی موج می‌شود. واژگونی موج تنها مکانیسم اثرگذار بر امواج در پلاسما نیست و تاثیر آن ممکن است توسط دیگر فرایندها، کاهش یافته و یا به تعادل برسد. پاشندگی می‌تواند یک مثال از چنین فرایندی باشد که در آن مولفه‌های فرکانس در امواج رونده در سرعت‌های متفاوت

منجر به کشیدگی موج در طول زمان می‌شوند. هنگامی که اثر واژگونی موج با پاشندگی به تعادل برسد، ساختار موج تحت عنوان سالیتون یا امواج منفرد شناخته می‌شود. فرایند دیگر، اتلاف انرژی یا میرایی موج در محیط است که مستلزم انتقال انرژی از موج و یک تعادل بین واژگونی و اتلاف در شکل گیری امواج ضربه است. امواج ضربه در محیط‌های نجومی بسیار متداول هستند. ضربه در واقع یک ناپیوستگی در پارامترهای یک سیال را بیان می‌کند. وقتی این ناپیوستگی در سیال حرکت کند موج ضربه منتشر می‌شود. هر جایی در سیال که موج ضربه به آن برسد، پارامترهای شاره با یک تغییر آنی روبه رو می‌شوند؛ به عبارت دیگر گذار از حالت اولیه به حالت نهایی در پهنای محدودی صورت می‌گیرد که بسیار کوچکتر از مسافت آزاد میانگین است. واضح است که امواج ضربه غیربرخوردی، وابسته به ذرات پرانرژی هستند.

روش‌های مختلفی برای آنالیز تئوری امواج غیر خطی تعریف شده اند؛ از جمله روش اختلال کاهشی برای امواج با دامنه کوتاه و روش پتانسیل سکدیف برای امواج با دامنه اختیاری. هنگامی که یک محیط هم دارای پاشندگی و هم اتلاف است، امواج غیر خطی با دامنه کوتاه می‌توانند توسط معادله کورته وگ دوریز-برگر (KdVB) توصیف شوند. این معادله علاوه بر جمله‌های غیرخطی و پاشندگی، شامل یک جمله اتلاfi است که جمله برگر نامیده می‌شود.

مکانیسم‌های مختلفی موجب اتلاف در پلاسما می‌شوند مانند میرایی لاندو، برهمکنش‌های موج-ذره، ویسکوزیته و میدان‌های مغناطیسی. اتلاف انرژی از طریق نیروهای ویسکوز می‌تواند یک تعادل برای نیروهای غیر خطی فراهم کند و سبب ایجاد امواج ضربه پایدار شود. هنگامی که اتلاف در محیط غلبه کند، امواج ضربه‌ای که ظاهر می‌شوند به صورت یکنواخت هستند. در حالت اتلاف ضعیف، امواج ضربه نوسانی ایجاد می‌شوند. در طول سال‌های گذشته، تحقیقات زیادی بر روی امواج ضربه در پلاسماهای کوانتومی انجام شده است از جمله بررسی ویژگی‌های امواج ضربه یون صوتی در این نوع پلاسماها [12-14].

امواج یون صوتی چند بعدی نیز توسط میزرا و همکارانش مورد مطالعه قرار گرفته است. آن‌ها نشان دادند که پارامترهای کوانتومی بر انتقال ضربه‌ها از حالت یکنواخت به نوسانی، تاثیر گذار هستند [18].

به دلیل اهمیت غیر قابل انکار پلاسماهای غباری، محققان به بررسی ویژگی‌های امواج ضربه در این گونه پلاسماها پرداخته اند. میزرا شرایطی را برای تشکیل امواج ضربه غبار

یون صوتی در پلاسمای غباری کوانتومی بیان کرده است. روحانی و همکارانش مشخصات امواج یون صوتی را در یک پلاسمای کوانتومی شامل ذرات غبار بررسی کرده و مشاهده کرده اند که نواحی وجود امواج ضربه‌ی یکنواخت و نوسانی بستگی به پارامترهای پراکندگی کوانتومی، چگالی ذرات غبار و پارامترهای اتلافی دارند [19]. پاکزاد امواج ضربه غبارصوتی را در یک پلاسمای جفت شده دارای توزیع کاپا بررسی کرده و نشان داد که این توزیع پارامترهای معادله KdVB را تحت تاثیر قرار می‌دهد [20]. کوهلی و همکارانش به بررسی برخورد امواج ضربه غبار صوتی در یک پلاسمای غباری کوانتومی پرداخته و تاثیر پارامترهای پلاسمای بر روی این امواج مورد مطالعه قرار دادند [21]. مسعود و همکارانش امواج ضربه غبار یون صوتی کوانتومی را در هندسه‌های غیر تخت استوانه ای و کروی مطالعه کردند و تاثیر این هندسه‌ها را بر روی ویژگی‌های این امواج نشان دادند [22]. گاش و همکارانش امواج ضربه غبارصوتی را در یک پلاسمای جفت شده مطالعه کرده و مشخصات این امواج را هنگامی که ذرات غبار در فاز جفت شده قوی مایع قرار دارند، بررسی کردند [23].

$$\frac{\partial n_d}{\partial t} + \frac{\partial (n_d u_d)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_d}{\partial t} + u_d \frac{\partial u_d}{\partial x} = \frac{\partial j}{\partial x} + h_d \frac{\partial^2 u_d}{\partial x^2} \quad (2)$$

$$- \frac{\partial f}{\partial x} - n_i \frac{\partial n_i}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} - s n_e \frac{\partial n_e}{\partial x} + \frac{H^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\sqrt{n_e}}{\sqrt{x}} \right) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (I - 1)n_e + n_d - In_i \quad (5)$$

شرط شبه خنثاییت برای این پلاسمای برابر است با  $1+E=I$  که در آن  $E = n_{e0} / Z_{d0} n_{d0}$  و  $I = n_{i0} / Z_{d0} n_{d0}$  ضرایب بهنجارش عبارتند از

$$t \otimes t w_{pd}, \quad x \otimes \frac{x}{l_D}, \quad h_d \otimes \frac{h_l}{m_d n_{d0} w_{pd} l_D^2}$$

$$n_j \otimes \frac{n_j}{n_{j0}}, \quad u_d \otimes \frac{u_d}{C_d}, \quad j \otimes \frac{e j}{2K_B T_{Fi}}, \quad n_j \otimes \frac{n_j}{n_{j0}}$$

به طوری که  $C_d = \sqrt{2Z_{d0} k_B T_{Fi} / m_d}$

و  $l_D = \sqrt{2k_B T_{Fi} / 4p Z_{d0} e^2 n_{d0}}$

الکترون‌ها در مقایسه با جرم ذرات غبار صرفنظر شده است. در روابط فوق  $H = \sqrt{h^2 Z_{d0} w_{pd}^2 / m_{e,p} m_d C_d^4}$  و  $s = T_{Fe} / T_{Fi}$

پارامتر بدون بعد کوانتومی است. برای مطالعه دینامیک امواج ضربه غبار صوتی با دامنه کوتاه، یک معادله KdVB به روش زیر به دست می‌آوریم. ابتدا تغییر متغیرهای  $x = e^{1/2} t$  و  $t = e^{1/2} (x - l t)$  و بسط‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$$n_j = 1 + e n_{j1} + e^2 n_{j2} + \dots$$

$$u_j = e u_{j1} + e^2 u_{j2} + \dots$$

$$j = e j_1 + e^2 j_2 + \dots$$

$$h_d = e^{1/2} h$$

با جایگذاری بسط‌های فوق در معادلات (1) تا (5) معادله KdVB عبارت است از

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + A j_1 \frac{\partial j_1}{\partial x} + B \frac{\partial^3 j_1}{\partial x^3} + C \frac{\partial^2 j_1}{\partial x^2} = 0 \quad (7)$$

که ضرایب آن عبارت است از:

در این پژوهش با استفاده از مدل درودینامیک کوانتومی معادلات حاکم بر دینامیک امواج ضربه غبار صوتی را در بخش دوم معرفی کرده و سپس با به کارگیری روش اختلال کاهشی، یک معادله KdVB به دست می‌آید. در بخش سوم با کمک روش تانژانت، حل تحلیلی این معادله شرح داده می‌شود. حل عددی معادله KdVB در بخش چهارم مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بخش پنجم به منظور مطالعه دینامیک خطی و آنالیز پایداری معادله KdVB حاصل، جواب‌های این معادله در دستگاه متحرکی که با سرعت فاز موج حرکت می‌کند بررسی خواهد شد. نتایج در بخش آخر شرح داده می‌شوند.

معادلات دینامیکی در این بخش، به مطالعه امواج غبار صوتی در یک پلاسمای غباری کوانتومی غیر مغناطیسی شامل الکترون‌های تبهگن، یون‌های با بار مثبت و ذرات غبار کلاسیکی دارای بار منفی خواهیم پرداخت. برای ساده‌سازی در این بخش فرض می‌کنیم همه ذرات غبار دارای جرم یکسان  $m_d$  و بار ثابت یکسان  $Z_d$  هستند. همچنین در مدل پلاسمایی فرض شده است که انرژی اتلافی به دلیل برخورد با ذرات خنثی ایجاد نشده بلکه در اثر ویسکوزیته طولی ذرات غبار  $h_l$  به وجود آمده است. رابطه بین این ویسکوزیته و ویسکوزیته برشی  $h_s$  و بالک  $h_b$  به صورت

## معادلات دینامیکی

برای ساده‌سازی در این بخش فرض می‌کنیم همه ذرات غبار دارای جرم یکسان  $m_d$  و بار ثابت یکسان  $Z_d$  هستند. همچنین در مدل پلاسمایی فرض شده است که انرژی اتلافی به دلیل برخورد با ذرات خنثی ایجاد نشده بلکه در اثر ویسکوزیته طولی ذرات غبار  $h_l$  به وجود آمده است. رابطه بین این ویسکوزیته و ویسکوزیته برشی  $h_s$  و بالک  $h_b$  به صورت

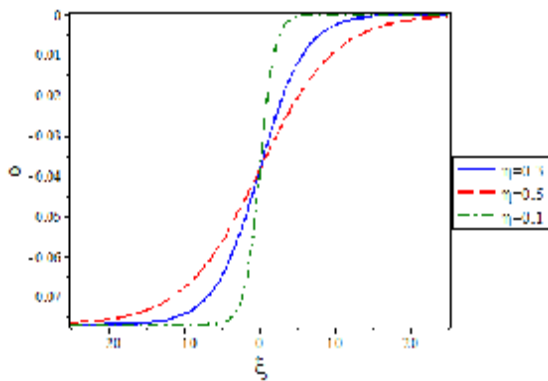
هنگامی که ضریب اتلافی  $C$  در یک سیستم، کوچکتر از مقدار بحرانی  $C_c$  باشد، موج ضربه مشخصات نوسانی خواهد داشت. اگر اتلاف در سیستم بزرگتر از  $C_c$  باشد  $B \in 0$  و معادله (7) به یک معادله برگرد تبدیل می‌شود:

$$-u \frac{\eta F}{\eta c} + A F \frac{\eta F}{\eta c} + C \frac{\eta^2 F}{\eta c^2} = 0 \quad (10)$$

که در این حالت موج ضربه ساختار یکنواخت به شکل زیر خواهد داشت:

$$F(c) = \frac{u}{A} \frac{\eta}{c} + \tanh\left(\frac{u}{2C} c\right) \frac{\ddot{\theta}}{\theta} \quad (11)$$

با در نظر گرفتن پارامترهای پلاسمایی  $n_{e0} = 5 \cdot 10^{29} m^{-3}$ ،  $T_i = 10K$ ،  $T_{Fe} = 100K$ ،  $Z_d = 10^3$ ،  $n_{i0} = 2 \cdot 10^{29} m^{-3}$ ،  $A = -2.6$  [24] مقادیر ثابت  $m_i = m_p$  و  $m_d = 10^{-17} kg$ ،  $B = 0.03$  به دست می‌آید. جواب معادله فوق را به ازای این مقادیر ثابت بررسی می‌کنیم.



شکل 1. تاثیر ویسکوزیته بر امواج ضربه یکنواخت

همان طور که در شکل (1) می‌توان دید، در این مدل پلاسمایی امواج ضربه یکنواخت رقیق غبار صوتی ایجاد می‌شوند. همچنین تاثیر ضریب اتلافی ( $C = h/2$ ) بر این امواج نشان می‌دهد که با افزایش ویسکوزیته ضخامت موج ضربه افزایش یافته، در حالی که ارتفاع آن ثابت باقی مانده است.

فرض می‌کنیم به ازای  $C \in 0$  که در آن  $F_0$  یک ثابت است و  $F_1 \square F_0$ ، جواب معادله (10) به صورت  $F = F_0 + F_1$  باشد. بر حسب  $F_1$  تا مرتبه خطی خواهیم داشت:

$$\frac{u}{A} F_1 - F_0 F_1 - \frac{C}{A} \frac{\eta F_1}{\eta c} - \frac{B}{A} \frac{\eta^2 F_1}{\eta c^2} = 0 \quad (12)$$

با جایگذاری  $F_0 = \frac{2u}{A}$  که از شرط تعادل به دست آمده است می‌توان نوشت:

$$B = -\frac{\eta E H^2}{c 4s^2} - \frac{\ddot{\theta}^3}{\theta^2}$$

$$A = -\frac{\eta E}{c s^2} + I \frac{\ddot{\theta}^3}{\theta^2} - \frac{3}{2I}$$

$$I = \frac{1}{\frac{\eta E}{c s} + I \frac{\ddot{\theta}^{3/2}}{\theta}}$$

$$C = -\frac{h}{2}$$

در صورتی که  $H^2 = 4s^2 / E$ ، معادله فوق تبدیل به معادله برگرد شده و تنها جواب‌های ضربه ای یکنواخت ایجاد می‌شود.

### حل تحلیلی معادله KdVB

روش‌های متعددی برای حل تحلیلی معادلات دیفرانسیل غیرخطی وجود دارد که روش تانژانت یکی از آنها است. این روش زمانی که معادله شامل هر دو اثر پراکندگی و اتلاف است، مناسب می‌باشد. با استفاده از تبدیل  $c = x - ut$ ، معادله KdVB به صورت زیر تغییر می‌کند

$$-u \frac{\eta F}{\eta c} + A F \frac{\eta F}{\eta c} + B \frac{\eta^3 F}{\eta c^3} + C \frac{\eta^2 F}{\eta c^2} = 0 \quad (8)$$

که در آن  $F = j_1$ . معادله فوق جوابی به صورت

$$F(c) = A_0 + A_1 \tanh ac + A_2 \tanh^2 ac \quad (9)$$

دارد که ضرایب آن عبارتند از

$$A_0 = \frac{u}{A} + \frac{12Ba^2}{A}$$

$$A_1 = \frac{-6h a}{5A}$$

$$A_2 = \frac{-12Ba^2}{A}$$

$$a = \frac{h}{20B}$$

بر اساس شرایط مرزی  $F = 0$ ،  $\frac{dF}{dc} = 0$ ،  $\frac{d^2F}{dc^2} = 0$  در

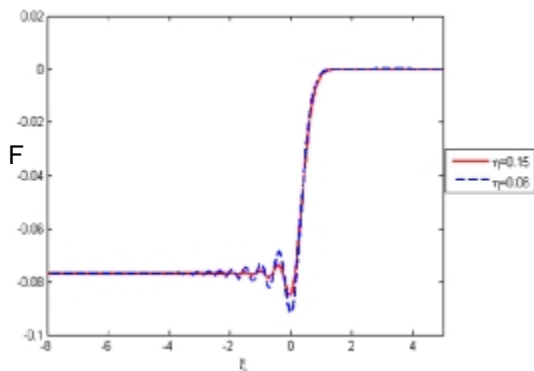
$C \in 0$  خواه  $m$  داشت  $u = \frac{6h^2}{100B}$ ؛ بنابراین ارتفاع موج

ضربه متناسب است با مجذور ویسکوزیته و ضخامت آن با  $B$  رابطه مستقیم و با  $h$  رابطه معکوس دارد. با توجه به مقادیر پراکندگی و اتلاف، امواج منفرد و یا امواج ضربه می‌توانند ایجاد شوند.

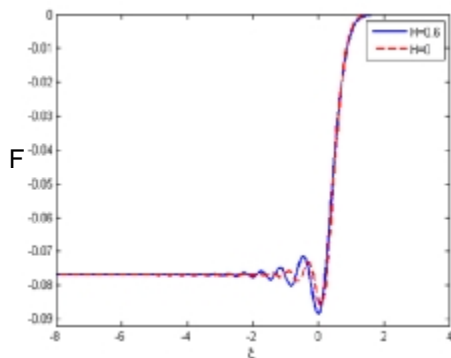
جواب‌های یکنواخت و نوسانی:

$$F(x, 0) = F_1 \frac{\infty}{c} \tanh\left(\frac{x}{L_1} \frac{\ddot{\phi}}{\phi}\right) \quad (16)$$

برای شبیه سازی عددی پارامترهای ثابت  $A = -2.6$ ،  $B = 0.03$  و  $v_0 = 0.1$  را در نظر می‌گیریم. شکل (3) نشان می‌دهد که با گذشت زمان  $t$ ، پالس یکنواخت اولیه که مربوط به یک پلاسمای غیرپاشنده است، به ضربه‌های نوسانی که به دلیل انتشار در ناحیه پاشنده رخ می‌دهند تغییر شکل می‌یابد. همچنین تعداد و ارتفاع این نوسانات با کاهش ویسکوزیته و در نتیجه کاهش ضریب اتلافی افزایش می‌یابد. در شکل (4) تاثیر پارامتر پراکندگی کوانتومی  $H$  بر روی امواج ضربه غیر خطی نمایش داده شده است. همانطور که می‌توان دید افزایش  $H$  منجر به افزایش تعداد نوسانات و افزایش دامنه می‌شود. با توجه به این واقعیت که امواج ضربه به واسطه اتلاف در سیستم ایجاد می‌شوند و افزایش  $H$  منجر به افزایش ضریب پاشندگی می‌شود نیز می‌توان این تغییرات را توجیه کرد.



شکل 3. جواب معادله (7) به ازای  $h = 0.15$  منحنی خط پر و  $h = 0.06$  منحنی نقطه چین



شکل 4. جواب معادله (7) به ازای مقادیر مختلف  $H$

### دینامیک غیرخطی و آنالیز پایداری

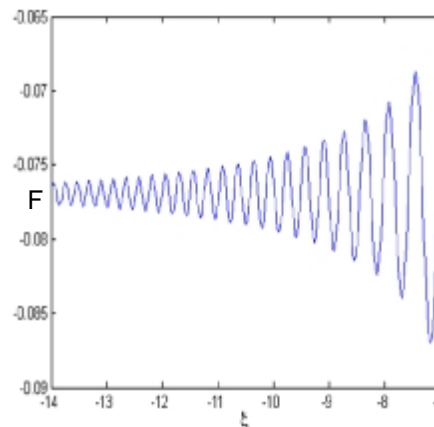
در این بخش به بررسی جواب معادله (6) در یک دستگاه متحرکی که با سرعت فاز موج حرکت می‌کند، می‌پردازیم. به

$$-u F_1 - B \frac{\nabla^2 F_1}{c^2} - C \frac{\nabla F_1}{c} = 0 \quad (13)$$

که دارای جوابی به صورت  $F_1 \mu \exp(Lc)$  خواهد بود و  $L = -\frac{C}{2B} \pm \left(\frac{C^2}{4B^2} - \frac{u}{B}\right)^{1/2}$  مقدار بحرانی ضریب اتلافی با استفاده از رابطه فوق برابر است با  $C_c = \sqrt{4Bu}$ . به سادگی می‌توان دریافت که امواج ضربه به ازای  $C > C_c$  یکنواخت و به ازای  $C < C_c$  نوسانی هستند. باید ذکر کنیم که مقدار بحرانی  $C$  به ضریب  $B$  و در نتیجه به ویسکوزیته سیستم وابسته است. جواب معادله (13) به ازای  $C < C_c$  به صورت زیر خواهد بود.

$$F = F_0 + C_0 \exp\left(\frac{-C}{2B} c\right) \cos\left(\sqrt{\frac{u}{B}} c\right) \quad (14)$$

ساختار نوسانی موج ضربه برای مقادیر کوچک ویسکوزیته که به ازای آن  $C < C_c$  باشد به ازای مقادیر ثابت  $h = 0.01$ ،  $B = 0.03$ ،  $A = -2.6$  در شکل (2) نمایش داده شده است.



شکل 2. جواب نوسانی موج ضربه

### حل عددی معادله KdVB

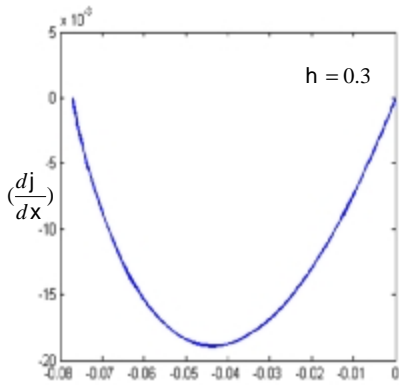
معادله (7) یک سیستم هامیلتونی انتگرال‌پذیر کامل نیست، به عبارت دیگر انرژی سیستم پایسته نیست؛ بنابراین حل دقیق تحلیلی برای این معادله امکان پذیر نمی‌باشد. اما می‌توان به وسیله آنالیز اختلالی یک جواب تقریبی به دست آورد [25]. در حالت خاصی که جمله پاشندگی صفر شود، معادله KdVB یک جواب عمومی به صورت زیر دارد:

$$F(x, t) = F_1 \frac{\infty}{c} \tanh\left(\frac{x - v_0 t}{L_1} \frac{\ddot{\phi}}{\phi}\right) \quad (15)$$

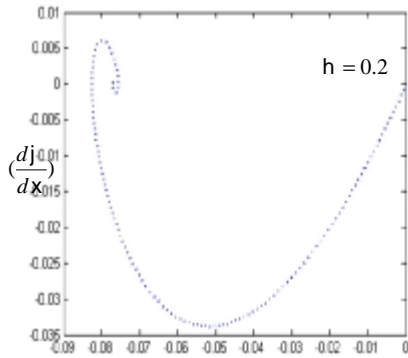
معادله فوق نمایش دهنده یک موج ضربه با سرعت  $v_0$ ، دامنه  $F_1 = v_0 / A$  و پهنای  $L_1 = 2C / v_0$  است. اکنون با روش رانگ-کوتا مرتبه چهار معادله (7) را حل می‌کنیم. شرط اولیه را معادله (15) به ازای  $t = 0$  قرار می‌دهیم:

از معادله (22) و (23) می‌توان دریافت هنگامی که  $C < 2\sqrt{UB}$  موج ضربه ساختار نوسانی و هنگامی که  $C \geq 2\sqrt{UB}$  ساختار یکنواختی را می‌پذیرد، بنابراین نقطه کانونی پایدار متناظر با مائه ت نوسانی و گره پایدار متناظر با مائه ت یکنواخت موج می‌باشد. همچنین تغییرات ویسکوزیته بر ارتفاع موج تاثیری نمی‌گذارد.

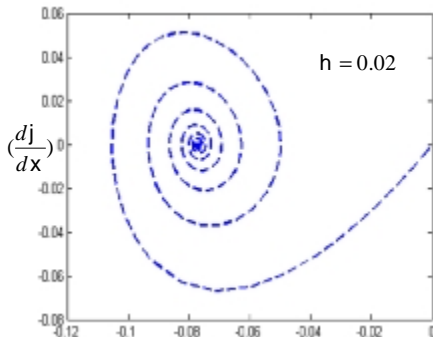
پیکره فازی سیستم (18) در شکل (5) رسم شده است. این شکل نشان می‌دهد که یک اختلال کوچک در مجاورت نقطه (0,0) منجر به تشکیل حلقه هتروکلینیک بین این نقطه و نقطه  $(2U/A, 0)$  می‌شود که تاییدی بر ساختار ضربه ای شکل است. همچنین کاهش تعداد مارپیچ‌ها، افزایش اتلاف را نشان می‌دهد [26].



(الف)



(ب)



این منظور معادله (7) به دستگاه موج رونده  $c = Ut - x$  منتقل می‌کنیم که در آن  $U$  یک سرعت ثابت مربوط به موج ضربه می‌باشد. این معادله با در نظر گرفتن شرایط مرزی  $F = 0$ ،  $dF/dc = 0$ ،  $d^2F/dc^2 = 0$  در  $x \in \mathbb{R}$  به شکل زیر تغییر می‌کند.

$$B \frac{d^2 F}{dc^2} + C \frac{dF}{dc} + \frac{A}{2} F^2 - UF = 0 \quad (17)$$

اکنون این معادله غیر خطی را می‌توان به شکل دینامیکی زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= \frac{dF}{dc} \\ \ddot{Z} &= \frac{1}{B} (UF - \frac{A}{2} F^2 - CZ) \end{aligned} \quad (18)$$

در صفحه  $(F, Z)$ ، معادله (18) دو نقطه ثابت دارد:  $(0, 0)$  و  $(2U/A, 0)$ . ماتریس متغیر سیستم (18) در این دو نقطه ثابت برابر است با:

$$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{C}{B} & -\frac{C}{B} \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$J_{(2U/A, 0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{C}{B} - \frac{U}{B} & -\frac{C}{B} \end{pmatrix}$$

ویژه مقادیر متناظر با نقاط ثابت  $(0, 0)$  و  $(2U/A, 0)$  توسط معادلات مشخصه زیر تعیین می‌شوند.

$$l^2 + \left(\frac{C}{B}\right)l - \left(\frac{U}{B}\right) = 0 \quad (20)$$

$$L^2 + \left(\frac{C}{B}\right)L + \left(\frac{U}{B}\right) = 0 \quad (21)$$

این دو معادله مشخصه دارای ویژه مقادیر

$$l = \frac{1}{2} \left[ -\frac{C}{B} \pm \sqrt{\frac{C^2}{B^2} + \frac{4U}{B}} \right] \quad (22)$$

$$L = \frac{1}{2} \left[ -\frac{C}{B} \pm \sqrt{\frac{C^2}{B^2} - \frac{4U}{B}} \right] \quad (23)$$

هستند. ویژه مقادیر متناظر با نقطه  $(0, 0)$  حقیقی، متمایز و با علامت مخالف هستند و این نشان دهنده این است که این نقطه همیشه یک نقطه زینی است. ویژه مقادیر متناظر با  $(2U/A, 0)$ ، یا یک جفت مزدوج مختلط با قسمت حقیقی منفی و یا حقیقی و متمایز با علامت منفی هستند. بنابراین این نقطه یک نقطه کانونی پایدار و یا یک گره پایدار است. نقطه کانونی پایدار، مربوط به مائه ت نوسانی و گره پایدار، مربوط به مائه ت یکنواخت جواب‌ها است.



همچنین تاثیر پارامتر پراکندگی کوانتومی  $H$  بر روی این امواج نشان داد که افزایش  $H$  منجر به افزایش تعداد نوسانات و دامنه موج ضربه نوسانی می‌شود. سپس به بررسی جواب‌های این معادله در دستگاه متحرکی که با سرعت فاز موج حرکت می‌کند، پرداخته شد. نتایج نشان داد معادله غیرخطی حاصل که به شکل یک سیستم دینامیکی نوشته شده است دارای دو نقطه ثابت  $(0,0)$  و  $(2U/A, 0)$  در صفحه فضای فاز  $(F, Z)$  است. بررسی ویژه مقادیر متناظر با این نقاط ثابت نشان داد که نقطه  $(0,0)$  همیشه زینی است و  $(2U/A, 0)$  یا یک نقطه کانونی پایدار است و یا یک گره پایدار. بررسی پیکره فازی سیستم دینامیکی نشان می‌دهد یک اختلال کوچک در مجاورت نقطه  $(0,0)$  منجر به تشکیل حلقه هتروکلینیک بین این نقطه و نقطه  $(2U/A, 0)$  می‌شود که تاییدی بر ساختار ضربه ای شکل است. همچنین کاهش تعداد مارپیچ‌ها، افزایش اتلاف را نشان می‌دهد.

## نتایج

در این مقاله امواج ضربه غبار صوتی یکنواخت و نوسانی در یک پلاسمای غباری کوانتومی به دو روش تحلیلی و عددی مورد بررسی قرار گرفت. به این منظور با استفاده از روش اختلال کاهش یک معادله KdVB به دست آمد. حل تحلیلی توسط روش تانژانت و حل عددی با کمک روش رانگ-کوتا مرتبه چهار انجام می‌شود. نتایج نشان داد در حالتی که اتلاف ضعیف باشد امواج ضربه نوسانی و در غیر این صورت امواج ضربه یکنواخت ظاهر می‌شود. تاثیر ویسکوزیته بر روی امواج ضربه غبار صوتی نشان داد که با افزایش ویسکوزیته، ضخامت موج ضربه یکنواخت افزایش یافته اما ارتفاع آن ثابت باقی می‌ماند. در موج ضربه نوسانی، تعداد و ارتفاع نوسانات با کاهش ویسکوزیته و در نتیجه کاهش ضریب اتلاfi افزایش می‌یابد.

## References

- [1] D. Kremp, T. Bornath, M. Bonitz, M. Schlages, Quantum kinetic theory of plasmas in strong laser fields, *Physical Review E*, 60 (1999) 4725.
- [2] G. Manfredi, How to model quantum plasmas, *Fields Inst. Commun*, 46 (2005) 263-287.
- [3] M. Bonitz, A. Filinov, J. Böning, J.W. Dufty, *Introduction to quantum plasmas*, Springer 2010.
- [4] S. Ali, *Waves and instabilities in quantum plasmas*, DOI (2008).
- [5] S.A. Khan, *Quantum Effects on Low Frequency Waves in Dense Plasmas*, COMSATS Institute of Information Technology, *Islamabad*, 2010.
- [6] F. Haas, *Introduction*, Springer 2011.
- [7] G. Brodin, M. Marklund, G. Manfredi, Quantum plasma effects in the classical regime, *Physical review letters*, 100 (2008) 175001.
- [8] P.K. Shukla, A. Mamun, *Introduction to dusty plasma physics*, CRC Press 2015.
- [9] F. Verheest, *Waves in dusty space plasmas*, Springer Science & Business Media 2001.
- [10] W. El-Taibany, M. Wadati, Nonlinear quantum dust acoustic waves in nonuniform complex quantum dusty plasma, *Physics of Plasmas* (1994-present), 14. 043202(2007).
- [11] N. d'Angelo, Ion-acoustic waves in dusty plasmas, *Planetary and Space Science*, 42 (1994) 507-511.
- [12] K. Roy, A. Misra, P. Chatterjee, Ion-acoustic shocks in quantum electron-positron-ion plasmas, *Physics of Plasmas*, 15 (2008) 032310.
- [13] W. Masood, A.M. Mirza, M. Hanif, Ion acoustic shock waves in electron-positron-ion quantum plasma, *Physics of Plasmas*, 15 (2008) 072106.
- [14] A. Misra, B. Sahu, Multidimensional ion-acoustic solitary waves and shocks in quantum plasmas,

## منابع

- Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 421 (2015) 269-278.
- [15] P.K. Shukla, G. Morfill, Low-frequency electrostatic wave in a metallic electron-hole-ion plasma with nanoparticles, *Journal of Plasma Physics*, 75 (2009) 581-585.
- [16] S.A. Khan, H. Saleem, Dispersion Properties of Co-Existing Low Frequency Modes in Quantum Plasmas, *Acoustic Waves*, DOI (2010) 57.
- [17] S. Ali, W. Moslem, I. Kourakis, P. Shukla, Parametric study of nonlinear electrostatic waves in two-dimensional quantum dusty plasmas, *New Journal of Physics*, 10 (2008) 023007.
- [18] A. Misra, Dust ion-acoustic shocks in quantum dusty pair-ion plasmas, *Physics of Plasmas*, 16 (2009) 033702.
- [19] M. Rouhani, Z. Mohammadi, A. Akbarian, Characteristic of ion acoustic shock waves in a dissipative quantum pair plasma with dust particulates, *Astrophysics and Space Science*, 349 (2014) 265-271.
- [20] H. Pakzad, Dust acoustic shock waves in strongly coupled dusty plasmas with kappa-distributed ions, *Indian Journal of Physics*, 86 (2012) 743-747.
- [21] R. Kohli, N. Saini, Head-on collision of dust acoustic shock waves in quantum plasma, *Physics of Plasmas*, 24 (2017).
- [22] W. Masood, M. Siddiq, S. Nargis, A.M. Mirza, Propagation and stability of quantum dust-ion-acoustic shock waves in planar and nonplanar geometry, *Physics of Plasmas*, 16 (2009).
- [23] A. Mamun, B. Eliasson, P. Shukla, Dust-acoustic solitary and shock waves in a strongly coupled liquid state dusty plasma with a vortex-like ion distribution, *Physics Letters A*, 332 (2004) 412-416.

- [24] W. El-Taibany, M. Wadati, Nonlinear quantum dust acoustic waves in nonuniform complex quantum dusty plasma, *Physics of plasmas*, 14 (2007).
- [25] V. Karpman, E. Maslov, Perturbation theory for solitons, *JETP*, 73 (1977) 537-559.
- [26] B. Sahu, D. Roy, Nonlinear quantum ion acoustic shock wave dynamics with exchange-correlation effects, *Advances in Space Research*, 61 (2018) 1425-1434.

آماده انتشار