Spring (2024) 6(3): 1-6
DOI: 10.30473/jphys.2023.69879.1177
Received: 03 Dec 2023 Accepted: 27 Jan 2024

Optoelectronic

Open Access

ORIGINAL ARTICLE

Two Interacting Atoms in a Two-Dimensional Anharmonic Trap Potential

Seyed Hosien Gangipour[1], Ebrahim Sadeghi[*2]

1 PhD. Student in Physics, Faculity of Science, Yasouj University, Yasouj, Iran.
2 Professor, Physics, Faculity of Science, Yasouj University, Yasouj, Iran.

Correspondence
Ebrahim Sadeghi
Email: sadeghi@yu.ac.ir

How to cite
Gangipour, S.H. Sadeghi, E. (2024). Two Interacting Atoms in a Two-Dimensional Anharmonic Trap Potential, Optoelectronic, 6(3), 1-6.

ABSTRACT
The present study seeks to scrutinize a two bosonic atoms system in the presence of a two-dimensional anharmonic and a short range interatomic potentials. The wave functions and energies of the harmonic part are analytically stated, and the effect of anharmonic term on the energy for different strengths of interaction is calculated. The results show that the relative motion and correction energy have different behaviors with the interaction strength. To investigate the dynamics of system, the fidelity for different coupling strengths is also calculated. The results are in good agreement with other works.

KEYWORDS
Optical Trap Potential, Anharmonic Potential, Fidelity, Two-Atom System.

https://jphys.journals.pnu.ac.ir

سال ششم، شماره سوم، بهار 1403 (1-6)
تاریخ دریافت: 1402/09/12 تاریخ پذیرش: 1402/11/07
DOI: 10.30473/jphys.2023.69879.1177

فصلنامه علمی
اپتوالکترونیک

«مقاله پژوهشی»

دو اتم برهم‌کنش‌دار در پتانسیل تله‌ای ناهماهنگ دو بعدی

سید حسین گنجی‌پور[1]، ابراهیم صادقی[2*]

1 دانشجوی دکتری فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه یاسوج، یاسوج، ایران.
2 استاد، گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه یاسوج، یاسوج، ایران.

چکیده

در این پژوهش یک سیستم دو اتمی بوزونی در حضور پتانسیل ناهماهنگ دو بعدی و یک پتانسیل بین اتمی کوتاه برد به‌طور دقیق بررسی شده است. توابع موج و انرژی قسمت هماهنگ به‌طور تحلیلی و تاثیر جمله ناهماهنگ پتانسیل بر انرژی به‌ازای شدت برهم‌کنش‌های مختلف محاسبه شده است. نتایج به‌دست آمده نشان‌دهنده رفتارهای متفاوتی برای حرکت نسبی و انرژی تصحیحی بر حسب شدت برهم‌کنش است. جهت بررسی دینامیک سیستم، کمیت فیدلیتی معرفی و به‌ازای شدت جفت‌شدگی‌های مختلف محاسبه شده است. نتایج با سایر پژوهش‌ها در توافق خوبی هستند.

واژه‌های کلیدی

پتانسیل تله نوری، پتانسیل ناهماهنگ، فیدلیتی، سیستم دو اتمی.

نویسنده مسئول:
ابراهیم صادقی
رایانامه: sadeghi@yu.ac.ir

استناد به این مقاله:
سید حسین گنجی‌پور، ابراهیم صادقی (1403). دو اتم برهم‌کنش‌دار در پتانسیل تله‌ای ناهماهنگ دو بعدی. فصلنامه علمی اپتوالکترونیک، 6(3), 1-6.

مقدمه

سامانه اتم‌های فوق سرد در حضور پتانسیل تله‌ای را می‌توان به عنوان کاندیدی مناسب برای بررسی ویژگی فیزیکی سیستم‌های بس-ذره‌ای در نظر گرفت [1 و 2]. این سیستم‌ها کاربردهای فراوانی از قبیل چگالش بوز-انشتین، ابر شارگی، رایانه‌های کوانتومی و... داشته و در سال‌های اخیر مورد توجه فراوانی قرار گرفته‌اند [5-3]. قید پتانسیل تله‌ای سبب حرکت آزادانه اتم‌ها در یک یا دو بعد می‌گردد.

پتانسیل تله‌ای با شکل‌های خاص را می‌توان با استفاده از آرایه‌ای از بیم‌های لیزری در جهت‌های مناسب ایجاد نمود [6]. پتانسیل تله‌ای معمولاً به شکل هماهنگ بیان می‌گردد [7و8]. در صورت انتخاب این شکل از پتانسیل، کمیت‌های فیزیکی متعددی از سیستم به‌صورت تحلیلی قابل حصول است. اما برخی ویژگی‌ها نظیر تشدیدهای القایی-ناهماهنگ ناشی از جفت‌شدگی حرکت مرکز جرم و حرکت نسبی نیازمند در نظر گرفتن تصحیحات ناهماهنگ در پتانسیل است [15-9]. از طرف دیگر برهم‌کنش بین اتم‌ها سهم اساسی در تعیین خصوصیات سیستم‌های چند اتمی دارد و بایستی به‌طور دقیق تعیین شوند. در سیستم‌های اتمی واقعی این برهم‌کنش‌ها دارای پیچیدگی‌های زیادی هستند، به‌طوری که نمی‌توان آن را بر حسب یک مدل نظری صریح بیان نمود. در صورتی که طول موج دوبروی اتم‌های فوق سرد آنقدر بزرگ باشد که جزئیات ظریف در پتانسیل برهم‌کنش دارای اهمیت کمتری باشد، می‌توان از *تقریب استقلال - شکل*[1] استفاده نمود. در این تقریب برهم‌کنش واقعی بین ذرات را می‌توان به‌صورت پتانسیل شبه نقطه‌ای با برد صفر جایگزین نمود [7].

رفتارهای غیر تعادلی از قبیل: ترمودینامیک غیر تعادلی، برهم‌کنش‌های هسته‌ای و مدارات الکتریکی در سیستم‌های واقعی مهم و در پیش‌بینی رفتار دینامیکی آن‌ها مؤثر است. به جهت بررسی تحول زمانی ساختارهای بلوری برهم‌کنش‌دار، استفاده از اتم‌های فوق سرد در شبکه‌های نوری نسبت به سیستم‌های الکترونی مزیت بیشتری داشته و اخیراً توجه بیشتری را به خود معطوف داشته‌اند.

برهم‌کنش‌های جاذبه و یا دافعه بین ذرات را می‌توان توسط کمیت *تقلیل دینامیکی*[2] و به ازای مقادیر متفاوتی از شدت جفت‌شدگی تشریح نمود [16]. تأثیر حالت‌های نهایی بر تقلیل دینامیکی، در تحول زمانی کمیت‌هایی همچون تابع موج، توزیع تکانه و فیدلیتی قابل مشاهده است.

در این مقاله یک سیستم دو اتمی برهم‌کنش‌دار با تقارن فضایی بوزونی در حضور یک پتانسیل دو بعدی ناهماهنگ مطالعه و تأثیر جمله ناهماهنگ پتانسیل و شدت جفت‌شدگی بر ترازهای انرژی بررسی شده است. در این راستا با استفاده از یک تغییر متغیر مناسب، معادله شرودینگر به دو قسمت حرکت مرکز جرم و حرکت نسبی تفکیک شده و به‌صورت تحلیلی حل گردیده است. از نظریه اختلال جهت محاسبه تصحیح انرژی ناشی از جمله ناهماهنگ استفاده شده و به جهت بررسی تحول زمانی سیستم، کمیت فیدلیتی معرفی گردیده است.

تئوری

هامیلتونی دو اتم یکسان در حضور پتانسیل تله‌ای دو بعدی به‌صورت زیر بیان می‌شود،

$$H = \sum_{i=1}^{2}\left[\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2_{x_i y_i} + V_i(x_i . y_i)\right] + V_{int}(\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}) \quad (1)$$

در عبارت فوق $V_i(x_i . y_i)$ بیانگر پتانسیل تله اپتیکی است و با توجه به شکل یک بعدی [14و15]، به‌صورت زیر بیان می‌شود،

$$V_i(x_i . y_i) = V_0\left[sin^2\left(\frac{2\pi x_i}{\lambda}\right) + sin^2\left(\frac{2\pi y_i}{\lambda}\right)\right] \quad (2)$$

V_0 و λ به ترتیب دامنه پتانسیل و طول موج هستند. شبه پتانسیل برهم‌کنش بین دو اتم V_{int}، در تقریب استقلال-جرم به‌صورت زیر انتخاب می‌شود [17و18]،

$$V_{int}(\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}) = g\ \delta^{(2)}_{reg}(\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}) \quad (3)$$

در رابطه فوق $\delta^{(2)}_{reg}$، تابع دلتای دو بعدی منظم[3] شده است که به دلیل هرمیتی شدن هامیلتونی آورده شده و g بیانگر شدت برهم‌کنش بوده و برای سیستم دو بعدی به‌صورت $g = \left[\log(\frac{1}{2{a_0}^2})\right]^{-1}$ به طول پراکندگی a_0 مربوط می‌شود [7].

با تعریف پارامتر ناهماهنگ $\alpha = \frac{-8\pi^2\hbar}{12\lambda^2 m\omega}$ و فرکانس $\omega = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\frac{2V_0}{m}}$ و استفاده از $\hbar\omega$ و $l = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ به‌عنوان واحدهای انرژی و طول (در سیستم یکای نوسانگر هماهنگ) و با اندکی عملیات جبری، معادله (2) به شکل زیر نوشته می‌شود [14و15].

$$V_i(x_i . y_i) = \frac{-1}{12\alpha}\left[sin^2\left(\sqrt{-6\alpha}x_i\right) + sin^2(\sqrt{-6\alpha}y_i)\right] \quad (4)$$

با استفاده از تغییر متغیرهای،

$$X = \frac{x_1+x_2}{\sqrt{2}} . Y = \frac{y_1+y_2}{\sqrt{2}} .\ x = \frac{x_1-x_2}{\sqrt{2}} .\ y = \frac{y_1-y_2}{\sqrt{2}} \quad (5)$$

می‌توان قسمت‌های حرکت مرکزجرم و حرکت نسبی را تفکیک نمود. با بسط V_i، معادله (4)، تا اولین جمله غیر صفر ناهماهنگ، پتانسیل‌ها به‌صورت زیر در می‌آیند

$$V_1 + V_2 = \frac{1}{2}[\ (x^2 + X^2 + y^2 + Y^2)\ + \alpha(x^4 + 6x^2X^2 + X^4 + y^4 + 6y^2Y^2 + Y^4)] \quad (6)$$

و

$$V_{int}(\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}) = \frac{1}{2}g\delta^{(2)}_{reg}(r) \quad (7)$$

با جایگذاری معادلات (6) و (7) در معادله (1)، هامیلتونی به شکل زیر در می‌آید،

1 Shape-Independent Approximation
2 Quench Dynamics
3 Regularized Delta Function

$$H = H_0 + H_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{-\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial X^2} - \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + (x^2 + X^2 + y^2 + Y^2) + g\,\delta_{reg}^2(x.y)\right] + \frac{\alpha}{2}(x^4 + 6x^2X^2 + X^4 + y^4 + 6y^2Y^2 + Y^4) \quad (8)$$

تابع موج کل برای قسمت بدون اختلال H_0 را می‌توان به‌صورت زیر نوشت،

$$(x.y.X.Y) = (\phi_{N_X}(X)\phi_{N_Y}(Y))_{cm}(\phi_{xy}(x.y))_{rel} \quad (9)$$

معادلات شرودینگر قسمت بدون اختلال هامیلتونی برای حرکت‌های مرکز جرم و نسبی جدا شده و به‌صورت زیر در می‌آیند،

$$\left(\frac{-\partial^2}{2\partial X^2} + \frac{X^2}{2}\right)\phi_{N_X}(X) = E_{N_X}\phi_{N_X}. \qquad E_{N_X} = N_X + \frac{1}{2} \quad (10)$$

$$\left(\frac{-\partial^2}{2\partial Y^2} + \frac{Y^2}{2}\right)\phi_{N_Y}(Y) = E_{N_Y}\phi_{N_Y}. \qquad E_{N_Y} = N_Y + \frac{1}{2} \quad (11)$$

و

$$\frac{1}{2}\left[\frac{-\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (x^2 + y^2) + g\,\delta_{reg}^2(x.y)\right]\phi_{xy}(x.y) = E_{xy}\phi_{xy}(x.y) \quad (12)$$

در روابط فوق N_X و N_Y اعداد صحیح و $\phi_{N_X}(X)$ و $\phi_{N_Y}(Y)$ توابع موج نوسانگر هماهنگ هستند و بر حسب چند جمله‌ای‌های هرمیت بیان می‌شوند.

برای حل معادله شرودینگر حرکت نسبی، معادله (12)، تابع موج $\phi_{xy}(x.y)$ بر حسب مجموعه کامل توابع موج نوسانگر هماهنگ بسط داده می‌شود، پس از جایگذاری و انجام عملیات جبری ، تابع موج و انرژی به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند [7]،

$$\phi_{xy}(x.y) = A\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\Gamma(-\nu)U(-\nu.1.x^2 + y^2) \quad (13)$$

و

$$\psi\left(-\frac{E_{xy}}{2} + \frac{1}{2}\right) = g^{-1} = \log\left(\frac{1}{2a_0^2}\right) \quad (14)$$

در روابط فوق A ثابت بهنجارش و $\nu = \frac{E_{xy}-1}{2}$ ، ψ و U به ترتیب مشتق لگاریتمی تابع-Γ اویلر و تابع فوق هندسی هستند. به جهت بررسی تاثیر جمله ناهماهنگ H_1 بر ترازهای انرژی از نظریه اختلال استفاده می‌گردد.

در بررسی دینامیک سیستم و از آنجایی که شدت جفت‌شدگی بر ویژه حالت‌های حرکت مرکزجرم تأثیر ندارد تابع موج قسمت مرکز جرم را در حالت پایه، $\phi_{0.cm} = \phi_{N_X}\phi_{N_Y}$، و همچنین به دلیل تقارن تبادل بوزونی، تابع موج حرکت نسبی $\phi_{xy}(x.y)_{rel} = \phi_{2v_{i.f}}(x.y)$ را به‌صورت ویژه حالت‌های **زوج**، در نظر می‌گیریم. از این رو تابع موج کل به شکل زیر در می‌آید،

$$\Psi_{0.2v_{i.f}} = \phi_{0.cm}\phi_{2v_{i.f}} \ . \quad (15)$$

اگر در ابتدا سیستم به ازای شدت برهم‌کنش g_i در ویژه حالت ایستای $\Psi_{0.2v_i}(x.y.X.Y)$ باشد و به‌طور ناگهانی g_i به g_f تغییر کند، ویژه حالت ایستای نهایی به‌صورت $\Psi_{0.2v_f}(x.y.X.Y)$ نوشته می‌شود. در این صورت تحول زمانی حالت نهایی را می‌توان به شکل زیر بیان کرد [16و21-19]،

$$\Psi_{0.2v_f}(x.y.X.Y.t) = \sum_{v_f} e^{-i\left(E_{2v_f}+1\right)t} C_{2v_f.v_i}\Psi_{0.2v_f}(x.y.X.Y) \quad (16)$$

در رابطه فوق $C_{2v_f.v_i}$ بیانگر هم پوشانی حالت‌های نهایی و اولیه بوده و به‌صورت

$$C_{2v_f.v_i} = \left\langle \Psi_{0.2v_f}(x.y.X.Y) \middle| \Psi_{0.2v_i}(x.y.X.Y) \right\rangle \quad (17)$$

قابل محاسبه می‌باشد. به دلیل تعامد توابع موج حالت پایه نوسانگر هماهنگ، $C_{2v_f.v_i}$ به شکل زیر ساده می‌شود،

$$C_{2v_f.v_i} = \left\langle \phi_{2v_f}(x.y) \middle| \phi_{2v_i}(x.y) \right\rangle \quad (18)$$

فیدلیتی را می‌توان به عنوان **معیاری** از تأثیر تقلیل برهم‌کنش بر دینامیک سیستم معرفی کرد. بنابراین فیدلیتی به‌صورت همپوشانی حالت اولیه و تحول زمانی حالت نهایی تعریف می‌گردد [15و19و20]،

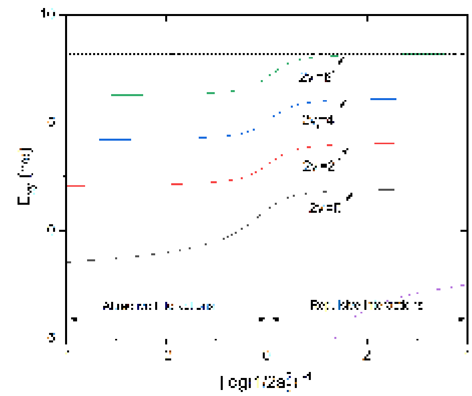
$$F(t) = \left|\left\langle \phi_{2v_i}(x.y.t=0) \middle| \phi_{2v_f}(x.y.t) \right\rangle\right| = \left|\sum_{v_f} e^{-i\left(E_{2v_f}\right)t}\left|C_{2v_f.2v_i}\right|^2\right| \quad (19)$$

لازم به ذکر است ازآنجایی که حرکت مرکز جرم تحت تأثیر $g \neq 0$ قرار نمی‌گیرد، در محاسبه فیدلیتی تنها حرکت نسبی وارد می‌شود.

بحث و نتایج

در این مطالعه، محاسبات بر حسب مقادیر نوعی زیر انجام شده است [14و15]: $g = -4 \ldots 4$ و α = -0.03025, -0.06. مقدار انتخاب شده برای α، مطابق با فرکانس $\omega = 2\pi \times 14.5\ kHz$ و طول موج $\lambda = 1.064 \times 10^{-4} cm$ می‌باشد که در مرجع [6] برای ایزوتوپ پایدار ^{133}Cs ارائه شده است. در تمام محاسبات، انرژی بر حسب واحد انرژی نوسانگر هماهنگ $(\hbar\omega)$ بیان شده‌اند.

با استفاده از معادله (14)، تأثیر شدت جفت‌شدگی، g، بر ترازهای انرژی حرکت نسبی محاسبه و در شکل (1) آورده شده است (منحنی خط پر). همچنان که دیده می‌شود به ازای شدت جفت‌شدگی‌های مثبت (منفی)، انرژی حالت‌ها افزایش (کاهش) می‌یابد. در نمودار فوق، خط‌چین‌ها بیانگر مقادیر مجانبی هستند. مقادیر مجانب انرژی ترازهای زوج به ازای $g>>0$ ($g<<0$) با مقادیر ترازهای زوج بعدی (قبلی) مطابقت دارد این رفتار ناشی از این است که با افزایش اندازه (مطلق) پارامتر جفت‌شدگی، طول پراکندگی a_0، به مقدار معینی میل می‌کند. بنابراین مقادیر



شکل 1. انرژی ترازهای زوج حرکت نسبی برای سیستم 2 اتمی در حضور پتانسیل تله‌ای ناهماهنگ بر حسب شدت برهم‌کنش در دو بعد.

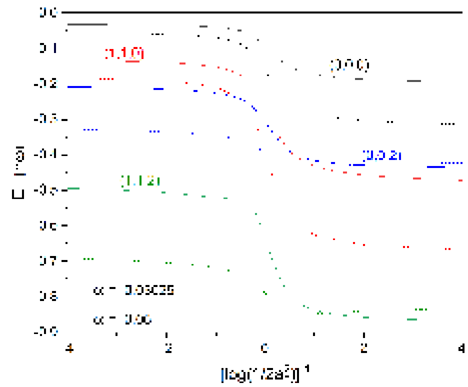
متفاوت شدت جفت‌شدگی دارای تأثیرات یکسانی بر ترازهای انرژی هستند.

به جهت مقایسه با کارهای انجام شده در جدول 1 انرژی قسمت حرکت نسبی E_{xy} محاسبه شده در مرجع [16] مربوط به سیستم یک بعدی (a) و محاسبات انجام شده در این مقاله، سیستم دو بعدی (b)، آورده شده است.

در شکل 2، تأثیر جمله ناهماهنگ به ازای $\alpha = -0.03025$ و $\alpha = -0.06$ بر ترازهای انرژی $(N_X.N_Y.2v)$ و بر حسب شدت برهم‌کنش g، آورده شده است. همچنان که از این شکل دیده می‌شود مقادیر انرژی تصحیحی ناشی از جمله ناهماهنگ به ازای شدت جفت‌شدگی مثبت (منفی) کاهش (افزایش) یافته و در مقادیر بزرگ g، رفتار مجانبی پیدا می‌کند. همچنین تأثیر α بر انرژی حالت پایه از تأثیر آن بر سایر ترازها کوچک‌تر است. نتایج در تطابق خوبی با پژوهش انجام شده در یک بعد است [14].

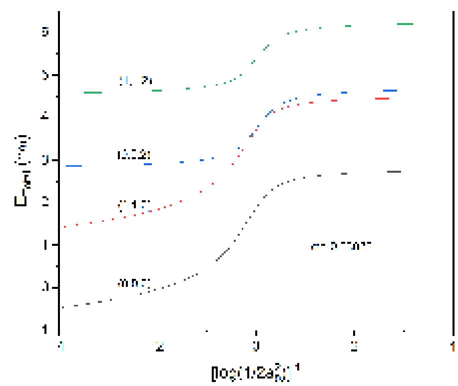
جدول 1. انرژی حرکت نسبی (a) محاسبات مرجع [16] و (b) این مقاله

$E_{xy}(\hbar\omega)$	$2v_i = 2$	$2v_i = 4$	$2v_i = 6$
a) g=4	3.2	5.1	7.2
a) g=-4	1.6	3.75	6
b) g=4	4.1	6.1	8.2
b) g=-4	2.1	4.2	6.2



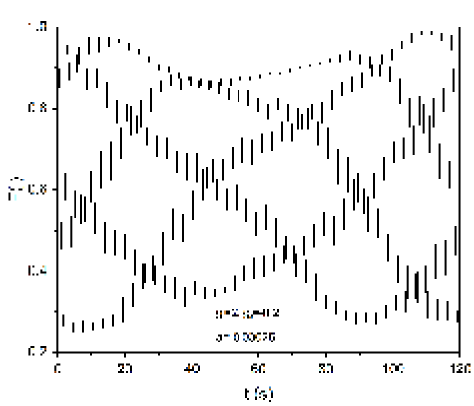
شکل 2. تصحیح انرژی برای سیستم 2 ذره‌ای در حضور پتانسیل ناهماهنگ بر حسب شدت جفت‌شدگی برای ترازهای مختلف.

انرژی کل سیستم دو اتمی (شامل: انرژی‌های حرکت مرکز جرم، حرکت نسبی و جمله تصحیحی) برای چندین تراز مختلف بر حسب شدت برهم‌کنش در $\alpha = -0.03025$ محاسبه و در شکل 3 آورده شده‌اند. از آنجایی که با افزایش شدت جفت‌شدگی، طول پراکندگی به مقدار معینی تمایل پیدا می‌کند، انرژی حالت‌های مختلف نیز با افزایش مقدار g، به مقدار اشباع می‌رسند.



شکل 3. انرژی کل بر حسب شدت جفت‌شدگی برای چندین تراز مختلف در سیستم 2 اتمی در حضور پتانسیل ناهماهنگ تله‌ای در دو بعد.

به جهت مطالعه دینامیک غیر تعادلی سیستم دو اتمی با پتانسیل تله‌ای ناهماهنگ که به‌طور ناگهانی از برهم‌کنش دافعه ($g_i = 2$ در $t = 0$) به جاذبه ($g_f = -0.2$) تغییر کرده باشد، فیدلیتی برای حالت اولیه $E_{2v_i=0}$، محاسبه و در شکل 4 نمایش داده شده است.



شکل 4. فیدلیتی برای یک سیستم دو اتمی بر حسب زمان

همچنان که از این شکل دیده می‌شود، فیدلیتی دارای رفتار نوسانی بوده و مقادیر آن از $F(t) = 1$، مطابق با قرارگیری سیستم در حالت اولیه (دو ذره در یک حالت) و $F(t) < 1$ (دو ذره در حالت‌های متفاوت) تغییر می‌کند. فیدلیتی متناظر با تفاوت انرژی بین حالت‌های نهایی، $\Delta E = E_{2v_f} - E_{2v'_f}$، دارای فرکانس‌های متعددی است. نتایج فوق با کار انجام شده توسط بادوینگ و همکاران برای یک سیستم با پتانسیل تله‌ای هماهنگ یک بعدی مطابقت دارد [16].

نتیجه‌گیری

برای یک سیستم 2 ذره‌ای در حضور یک پتانسیل تله‌ای هماهنگ و همچنین یک پتانسیل برهم‌کنش بین اتمی نقطه‌ای در دو بعد یک جواب تحلیلی با استفاده از تغییر متغیر مناسب ارائه شده است. تصحیح انرژی ناشی از جمله ناهماهنگ به‌صورت اختلال محاسبه و آورده شده است. نتایج نشان می‌دهند که انرژی‌ها نه تنها به پارامتر ناهماهنگ α، بلکه به شدت جفت‌شدگی g، نیز وابسته هستند. نواحی جاذبه و یا دافعه انرژی به علامت شدت جفت‌شدگی بستگی دارد. دینامیک غیر تعادلی سیستم برای حالت‌های اولیه و نهایی نیز توسط کمیت فیدلیتی بررسی شده و رفتار نوسانی آن که ناشی از هم‌پوشانی حالت‌های اولیه و نهایی است نشان داده شده است.

منابع

[1] M. Lewenstein, A. Sanpera, V. Ahu_nger, B. Damski, A. Sen and U. Sen, Adv. Phys. 56 (2007) 243.
[2] I. Bloch, J. Dalibard andW. Zwerger, Rev. Mod. Phys. 80 (2008) 885.
[3] V.O. Nesterenko, A.N. Novikov, E. Suraud, Transport of the Repulsive Bose Einstein Condensate in a Double-Well Trap: Interaction Impact and Relation to the Josephson Effect, Laser Phys. 24 (2014) 125501.
[4] C. Chin, R. Grimm, P. S. Julienne, and E. Tiesinga, Feshbach resonances in ultracold gases, Rev. Mod. Phys. 82 (2010) 1225
[5] G. Zurn, F. Serwane, T. Lompe, A. N. Wenz, M. G. Ries, J. E. Bohn, and S. Jochim, Fermionization of two distinguishable fermions, Phys. Rev. Lett. 108 (2012) 075303.
[6] E. Haller, M. J. Mark, R. Hart, J. G. Danzl, L. Reichsollner, V. Melezhik, P. Schmelcher, H.C. Nagerl, Confinement induced resonances in low dimensional quantum systems, Phys. Rev. Lett. 104 (2010) 153203.
[7] T. Busch, B.G. Englert, K. Rzazewski, and M. Wilkens, Two cold atoms in a harmonic trap, Found. Phys. 28 (1998) 549
[8] M. Olshanii, Atomic scattering in the presence of an external confinement and a gas of impenetrable bosons, Phys. Rev. Lett. 81 (1998) 938.
[9] J.P. Kestner, L.M. Duan, Anharmonicity-induced resonances for ultracold atoms and their detection, New J. Phys. 12 (2010) 053016.
[10] S. Sala, A. Saenz, Theory of inelastic con_nement-induced resonances due to the coupling of center-of-mass and relative motion, Phys. Rev. A 94 (2016) 022713.
[11] S.-G. Peng, H. Hu, X.-J. Liu, P.D. Drummond, Confinement-induced resonances in anharmonic waveguides, Phys. Rev. A 84 (2011) 043619.
[12] C.F.S. Zephania, T. Sil, Study of autonomous conservative oscillator using an improved perturbation method, J. Vib. Eng. Technol. 9 (2021) 409.
[13] Q. Wang, B. Xiong, Anharmonicity-induced criticality of collective excitation in a trapped Bose Einstein condensate, Internat. J. Modern Phys. B 32 (2018) 1850345.
[14] I. S. Ishmukhamedov, D. T. Aznabayev, and S. A. Zhaugasheva, Two Body Atomic System in a One Dimensional Anharmonic Trap: The Energy Spectrum, Physics of Particles and Nuclei Letters, 12(5) (2015) 680-688.
[15] I.S. Ishmukhamedov, Quench dynamics of two interacting atoms in a onedimensional anharmonic trap, Physica E 142 (2022) 115228
[16] L. Budewig, S. I. Mistakidis, and P. Schmelcher, Quench dynamics of two one-dimensional harmonically trapped bosons bridging attraction and repulsion, Molecular Physics 117 (2019) 2043-2057.
[17] M. Rontani, G Eriksson, S Åberg and S M Reimann, On the renormalization of contact interactions for the configuration-interaction method in two-dimensions, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 50 (2017) 065301-065311
[18] M. Olshanii, and L. Pricoupenko, Rigorous Approach to the Problem of Ultraviolet Divergencies in Dilute Bose Gases, Phys. Rev. Lett. , 88 (2002) 010402
[19] S. Campbell, M. A. Garcia-March, T. Fogarty and T. Busch, Quenching small quantum gases: Genesis of the orthogonality catastrophe, Phys. Rev. A 90 (2014) 013617.
[20] T. Plaβmann, S. I. Mistakidis, P. Schmelcher, Quench dynamics of finite bosonic ensembles in optical lattices with spatially modulated interactions, J. of Phys. B: Atomic, molecular and optical physics 51 (2018)225001
[21] M. Ebert, A. Volosniev, H. W. Hammer, Two cold atoms in a time dependent harmonic trap in one dimension, Ann. Phys. 1 (2016)12.