

## عوامل موثر در عدم قطعیت برخوردهای جواب‌های کینک در سیستم $\varphi^4$

محمد محمدی<sup>1</sup>، محمد قناعتیان<sup>2</sup>، فریده سهولی<sup>3</sup>

1. استادیار، گروه فیزیک، دانشگاه خلیج فارس بوشهر

2. استادیار، گروه فیزیک، دانشگاه پیام نور

3. دانشجوی کارشناسی ارشد، فیزیک، دانشگاه پیام نور

تاریخ دریافت: 1396/03/29 تاریخ پذیرش: 1396/06/29

## The Affective Factors on the Uncertainty of the Collisions of the Kink-Solutions in $\varphi^4$ System

M. Mohammadi<sup>1</sup>, M. Ghanaatian<sup>2</sup>, F. Soholi<sup>3</sup>

1. Assistant Professor of Physics, Persian Gulf University, Bushehr

2. Assistant Professor of Physics, Payame Noor University

3. Master Student of Physics, Payame Noor University

Received: 2017/06/19 Accepted: 2017/09/20

### Abstract

In this paper, we first described briefly the non-linear system  $\varphi^4$  and its solitary kink and anti-kink solutions in a  $1 + 1$  dimensional space-time. We showed that there will be an internal channel for the low amplitude oscillations for the kink (anti-kink) solutions. For such oscillations with specific velocity dependent frequencies and wavelengths, there are the similar wave-particle relations to the standard quantum mechanical ones. Finally, we showed numerically that in the collisions between kink-ant kink pairs, the output results are completely dependent on the initial phases of the oscillations which are imposed on the kink-ant kink pairs. In other words, the uncertainty created in the output of the same collisions is due to a quantity that does not in any way play a role in the particle properties, which can be called a hidden variable.

### Keywords

Kink, Anti-kink, Uncertainty, Solitary Solutions.

### چکیده

مقاله حاضر، ابتدا به طور خلاصه، سیستم غیرخطی  $\varphi^4$  و جواب‌های منفرد کینک و پاکینک وابسته به آن را در فضا-زمان  $1 + 1$  بعدی معرفی می‌کند و نشان می‌دهد که برای جواب‌های کینک (پاکینک)، یک کانال داخلی برای ایجاد نوسانات کم دامنه وجود دارد. برای چنین نوساناتی با فرکانس‌ها و طول موج‌های مشخص وابسته به سرعت، روابط موجی-ذره‌ای مشابه با روابط موجی-ذره‌ای استاندارد کوانتوم مکانیک برقرار است. در نهایت به صورت عددی نشان خواهد داد که در برخوردهای بین زوج کینک-پاکینک‌ها، نتایج خروجی کاملاً به فازهای اولیه نوسانات حاکم بر زوج کینک-پاکینک اولیه وابسته است. به عبارت دیگر، عدم قطعیت ایجاد شده در خروجی برخوردهای مشابه، ناشی از کمیتی است که به هیچ وجه در خصوصیات ذره‌ای نقشی ندارد، چیزی که می‌توان آن را یک متغیر نهان نامید.

### واژگان کلیدی

کینک، پاکینک، عدم قطعیت، جواب‌های منفرد.

## مقدمه

رفتارهای ذره‌ای مانند جواب‌های منفرد کینک و پادکینک در سیستم‌های غیرخطی در فضا-زمان  $1 + 1$  بعدی در بسیاری از مقالات و کتاب‌ها مورد توجه بوده است [1-30]. اینکه با یک مدل میدان کاملاً کلاسیک، بتوان به مفهوم ذره به عنوان یک برجستگی از میدان و انرژی در فضا عینیت بخشید، بسیار جالب و چشمگیر است. موجوداتی که مشابه با ذرات واقعی، تمامی روابط در خور انتظار نسبت و مکانیک نسبیتی را ارضاء می‌کنند و مانند ذرات بنیادی پایدار هستند. در واقع این دست مدل‌های غیر خطی  $1 + 1$  بعدی را می‌توان به عنوان مدل‌های اسباب بازی (Toy models) برای ایجاد درک بهتری از برخوردها و برهمکنش‌های ذرات، به صورت کلاسیک معرفی کرد. در فضا زمان  $3 + 1$  بعدی، مدل معروف اسکرم [23] مرتبط با باریون‌ها و همچنین مدل توفت - پولیوکو [24 و 25] مرتبط با معرفی تک قطبی مغناطیسی از جمله تلاش‌های موفق در این زمینه هستند.

درباره برخی سیستم‌های غیرخطی با جواب‌های کینک (پادکینک) مشخص شده است که کانال یا کانال‌هایی داخلی برای ایجاد نوسانات کم دامنه در آنها امکان‌پذیر است [16-18]. به عبارت دیگر، یک جواب کینک می‌تواند نوسانات کم دامنه کوچکی را همراه خود داشته باشد. نکته جالب درباره این نوسانات کم دامنه آن است که کاملاً متناظر با روابط مکانیک موجی ذرات کوانتومی، برای این گونه از نوسانات روابط مشابهی وجود دارد؛ برای مثال روابط آشنای  $\mathbf{E} = \hbar\omega$  و  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$  که در مکانیک کوانتومی به عنوان اصول موضوع پذیرفته می‌شوند، در اینجا به عنوان یک نتیجه طبیعی ناشی از هم وردایی معادلات موج نوسانات کم دامنه، استخراج می‌شوند. بنابراین در یک مدل کاملاً کلاسیک با پدیده‌های موج و ذره به صورت هم‌زمان بدون هیچ گونه تناقضی مواجه هستیم.

در نظریه میدان‌های کوانتومی، با به کارگیری ابزارهای ریاضیاتی محض، فقط بین اطلاعات ورودی و احتمالات خروجی ارتباطی است. اما هیچ گاه این سوال که چرا طبیعت در ذات خود احتمالاتی رفتار می‌کند، پاسخی نداریم. بسیاری از بزرگان علم فیزیک این سوال را فقط به این دلیل که نظریه به نتایج درستی ختم می‌شود که مطابق با نتایج آزمایشگاهی است، سوالی بی‌اهمیت می‌دانند! بر

خلاف نظر غالب فیزیکدانان کوانتومی، که سوال درباره احتمال را امری بی‌دلیل و بی‌جا می‌دانند، مقاله حاضر سعی می‌کند حداقل در مقام تلنگر زدن و اشاره کردن، نشان دهد که شاید ریشه عدم قطعیت‌ها به متغیرهای نهانی مربوط شود که هیچ گاه درباره مقدار آنها علم نداریم و درخور اندازه‌گیری هم نیستند.

در این مقاله نشان می‌دهیم که درباره فاز اولیه نوسانات کم دامنه حاکم بر کینک‌ها و پادکینک‌های اختلالی، به عنوان موجوداتی ذره مانند، نتیجه خروجی برخوردها به طور جدی تحت تاثیر است. به عبارت دیگر شاهد یک عدم قطعیت جدی در خروجی نتایج برخورد موجودات ذره‌ای هستیم. برای رسیدن به این هدف، به طور ویژه، محاسبات خود را به سیستم شناخته شده  $\varphi^4$  و جواب‌های کینک و پادکینک آن محدود می‌کنیم [1، 11-15].

با وجود عدم قطعیت آشکار در برخوردهای کینک - پادکینک اختلالی سیستم  $\varphi^4$ ، اما درباره برخوردهای غیراختلالی آنها، ذات غیر خطی این سیستم، رفتارهای جالب و پیش‌بینی نشده‌ای را رقم می‌زند که در نوع خود چشمگیر است؛ چیزی که تحت عنوان دریاچه‌های پراکندگی<sup>1</sup> شناخته شده است [21 و 22]. یک دریاچه پراکندگی، در واقع، یک تندی مشخص برای زوج کینک - پادکینک برخورد کننده است که به ازای آن، برخلاف انتظار غالب در یک طیف از تندی‌ها که تماماً به فرایند جذب منتهی می‌شود، برای این تندی خاص به پراکندگی ختم می‌شود. در این مقاله با ارائه یک تحلیل عددی، دریاچه‌های پراکندگی سیستم  $\varphi^4$  و وابستگی آنها به اختلالات اعمالی، مورد توجه و بحث قرار گرفته است.

## معرفی سیستم $\varphi^4$ با جواب‌های کینک

سیستم‌های میدان غیرخطی نسبتی با جواب‌های شناخته شده کینک و پادکینک در فضا زمان  $1 + 1$  بعدی در حالت کلی، توسط چگالی لاگرانژی زیر معرفی می‌شوند:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{\varphi})^2 - \frac{1}{2}(\varphi')^2 - U(\varphi) \quad (1)$$

کارگیری یک خیز (بوست<sup>1</sup>) نسبیتهی به سادگی فرم متحرک آن را مشخص کرد. معادله موج (2) برای یک ناظر خاص که آن را ساکن می‌بیند، به فرم زیر خلاصه می‌شود:

$$\square\varphi = -\frac{d^2\varphi}{d\tilde{x}^2} = -\frac{dU}{d\varphi} \quad (5)$$

در اینجا  $\tilde{x} = \gamma(x - vt)$  که در آن  $v$  سرعت جواب منفرد و  $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$  است، با ضرب دو طرف معادله (3) در  $\frac{d\varphi}{d\tilde{x}}$  و انتگرال‌گیری، به نتیجه زیر می‌رسیم:

$$\frac{d\varphi}{d\tilde{x}} = \sqrt{2U(\varphi)} + C' \quad (6)$$

برای اینکه یک جواب منفرد با انرژی محدود داشته باشیم می‌بایست ثابت انتگرال  $C'$  را برابر با صفر قرار دهیم. با انتگرال‌گیری از رابطه (4)، در نهایت، خواهیم داشت:

$$\tilde{x} - \tilde{x}_0 = \int \frac{\pm d\varphi}{\sqrt{2U(\varphi)}}. \quad (7)$$

با حل این انتگرال در حالت کلی می‌توان تمامی جواب‌های منفرد ایستای ممکن را به دست آورد. یک میدان خاص مانند  $\varphi_0$  که به ازای آن پتانسیل و مشتق اول آن صفر می‌شود، در اصطلاح یک نقطه خلاصه نامیده می‌شود ( $U(\varphi_0) = 0$  و  $\frac{dU}{d\varphi}(\varphi_0) = 0$ ). چنانچه پتانسیل  $U(\varphi)$ ،  $n$  نقطه خلاصه داشته باشد، در این صورت با حل انتگرال (7) در حالت کلی  $2(n-1)$  نوع از جواب‌های منفرد که آنها را کینک و پادکینک می‌نامیم، وجود خواهد داشت. در حقیقت برای هر دو نقطه خلاصه مجاور، یک جواب کینک و یک جواب پادکینک موجود است. به بیانی دیگر، محدوده تغییرات یا برد میدان  $\varphi$  یک جواب کینک یا پادکینک، به فاصله میدانی دو نقطه خلاصه مجاور محدود است. جواب‌های کینک (پادکینک) را اصطلاحاً توپولوژیک می‌نامند، به این معنی که در حد  $\pm\infty$  به مقادیر متفاوت ولی ثابتی که در واقع همان نقاط خلاصه هستند، میل می‌کنند. برای جواب کینک (پادکینک) مقدار

که در آن  $\varphi$  یک میدان اسکالر حقیقی و علامت‌های نقطه و پریم به ترتیب نشان دهنده مشتقات زمانی و مکانی هستند.  $U(\varphi)$  را تابع پتانسیل میدان و به طور خلاصه پتانسیل می‌نامیم. معادله دینامیکی وابسته به این چگالی لاگرانژی، در حالت کلی، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\square\varphi = \ddot{\varphi} - \varphi'' = -\frac{dU}{d\varphi} \quad (2)$$

در صورتی که پتانسیل  $U(\varphi)$ ،  $n$  نقطه خلاصه داشته باشد،  $2(n-1)$  نوع از جواب‌های منفرد که آنها را کینک و پادکینک می‌نامیم، وجود خواهد داشت. جواب منفرد به جواب‌های خاصی گفته می‌شود که فرم چگالی انرژی وابسته به آنها به صورت جای‌گزیده با سرعت ثابت حرکت می‌کند. جواب‌های منفرد کینک و پادکینک، توپولوژیک هستند. به این معنی که فرم میدان وابسته به آنها در حد  $\pm\infty$ ، به مقادیر متفاوت از نقاط خلاصه مجاور میل می‌کند. تانسور انرژی تکانه وابسته به چگالی لاگرانژی (1) با استفاده از قضیه نودر، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu\varphi\partial^\nu - g^{\mu\nu} \quad (3)$$

که در آن  $g^{\mu\nu}$  تانسور متریک در فضا-زمان  $1+1$  بعدی می‌باشد. مولفه  $T^{00}$  تانسور انرژی-تکانه برابر با تابع چگالی انرژی می‌باشد:

$$\varepsilon(x, t) = \frac{1}{2}(\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}(\varphi'_0)^2 + U(\varphi) \quad (4)$$

به طور خلاصه، در مبحث سالیتون‌ها، یک جواب منفرد، به جواب خاصی از معادله موج گفته می‌شود که فرم چگالی انرژی وابسته به آن به صورت جای‌گزیده و بدون تغییر شکل با سرعت ثابت حرکت کند. برای یک جواب منفرد مطلوب با انتگرال‌گیری مکانی از تابع چگالی انرژی در کل فضای یک بعدی، انرژی کل یک جواب منفرد حاصل خواهد شد که آن را با  $E$  نمایش می‌دهیم.

برای به دست آوردن جواب‌های منفرد معادله دینامیکی (2)، به دلیل ناوردایی معادلات و روابط تحت تبدیلات لورنتس، بهترین راه این است که در قدم اول یک حل ایستای معادله موج (2) را به دست آوریم و در قدم بعد با به

که دقیقاً مطابق با انتظار کلاسیکی ما از مفهوم ذرات، معادل با یک انرژی جای‌گزیده است و با سرعت ثابت  $v$  حرکت می‌کند. به دلیل وجود تابعیت  $\gamma(x - vt)$ ، به سادگی می‌توان نشان داد که عرض این بسته انرژی، دقیقاً مطابق با پدیده انقباض لورنتس، منقبض می‌شود (البته این نتیجه به صورت عام برای هر سیستم دلخواه نسبیتی برقرار است). برای این گونه از سیستم‌ها، فارغ از نوع پتانسیل، روابط تکانه - جرم - انرژی نسبیتی، دقیقاً به همان نتایج شناخته شده معمول، منتج می‌شود:

$$E = \gamma E_0, \quad E^2 = E_0^2 + p^2 c^2 \quad (13)$$

که در آن  $E_0$  انرژی سکون یک کینک (پادکینک) ساکن،  $E$  انرژی یک کینک متحرک و  $p$  تکانه نسبیتی مرتبط است. برای به دست آوردن تکانه جواب کینک (پادکینک)، تنها کافی است از مولفه  $T^{01}$  تانسور انرژی تکانه (3)، بر روی کل فضای یک بعدی، انتگرال گرفت. در واقع  $T^{01}$  چگالی تکانه نامیده می‌شود.

با وجود زیبایی رفتار این جواب‌ها در مقایسه با ذرات کلاسیکی که در واقع نشات گرفته از ذات غیر خطی این میدان کلاسیکی حقیقی است، ولی متأسفانه این امید برای یافتن جواب‌هایی مشابه از یک میدان حقیقی در فضا زمان  $3 + 1$  بعدی به دلیل ارائه قضیه‌ای توسط دریک (Derrick)، به بن بست رسیده است [26]. به عبارت دیگر در فضا زمان  $3 + 1$  بعدی با چگالی لاگرانژی استاندارد

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - U(\phi) \quad (14)$$

هر گونه تلاش برای یافتن جواب‌هایی منفرد و جای‌گزیده به نتیجه مطلوب ختم نمی‌شود. منظور از نتیجه مطلوب، این است که دست‌یابی به یک جواب پایدار در فضا زمان  $3 + 1$  بعدی با قید سیستم‌هایی که توسط چگالی لاگرانژی (14) معرفی شده‌اند، امکان‌پذیر نیست. البته با قید سیستم‌های کلاسیک - گوردون غیرخطی مختلط که با چگالی لاگرانژی

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - V(|\phi|) \quad (15)$$

میدان  $\phi$  در حد  $+\infty$  بیشتر (کمتر) از مقدار آن در حد  $-\infty$  است. خاصیت توپولوژیک بودن این دسته از جواب‌ها مهم‌ترین دلیل پایدرای آنها است. اگر پتانسیلی داشته باشیم که تنها یک نقطه خلا داشته باشد، برای چنین پتانسیلی، جواب‌های منفرد به معنای یک جواب با انرژی محدود وجود نخواهند داشت و در صورت وجود، بدون شک، ناپایدار است. در حالت کلی، برای سیستم‌های  $1 + 1$  بعدی نسبیتی، می‌توان یک جریان پایستار به نام جریان بار توپولوژیک را تعریف نمود:

$$J^\mu = C \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \quad (8)$$

که در آن  $\epsilon^{\mu\nu}$  ماتریس پادمتقارن و  $C$  صرفاً یک عدد ثابت است. کمیت پایسته وابسته به این جریان پایستار، در اصطلاح بار توپولوژیک نامیده می‌شود که فقط به مقادیر مرزی جواب منفرد در حد  $\pm\infty$  بستگی پیدا می‌کند:

$$Q = \int J^0 dx = C [\phi(+\infty) - \phi(-\infty)] \quad (9)$$

برای کینک‌ها، بار توپولوژیک مثبت و برای پاد کینک‌ها بار توپولوژیک منفی است و در اینجا  $C$  صرفاً یک عدد ثابت دلخواه است.

برای پتانسیل‌های مختلف  $U(\phi)$  انتخاب‌های مختلفی می‌توان انجام داد. یکی از معروف‌ترین سیستم‌هایی که در این زمینه معرفی شده است، سیستم  $\phi^4$  است که با پتانسیل زیر معرفی می‌شود:

$$U(\phi) = \frac{1}{2}(\phi^2 - 1)^2 \quad (10)$$

برای این پتانسیل، دو نقطه خلا  $\phi = \pm 1$  داریم. دو جواب منفرد کینک و پادکینک وابسته به چنین پتانسیلی که با سرعت ثابت  $v$  حرکت می‌کنند، به شکل زیر هستند:

$$\phi(x, t) = \pm \tanh[\gamma(x - vt)] \quad (11)$$

که در آن  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2}$  تابع چگالی انرژی مرتبط، به فرم ساده زیر حاصل خواهد شد:

$$\varepsilon(x) = \gamma^2 \operatorname{sech}^2(\gamma(x - vt)) \quad (12)$$

داشتن جملات تا مرتبه اول  $\Psi$ ، به یک معادله ویژه مقداری شبه شرودینگر می‌رسیم:

$$-\frac{d^2\Psi}{dx^2} + V(x)\Psi = \omega_0^2\Psi \quad (17)$$

که در آن  $V(x) = \frac{d^2U(\varphi_0)}{d\varphi_0^2}$  را پتانسیل کینک می‌نامیم، زیرا منشا آن خود جواب منفرد کینک یا پادکینک است. دقت داشته باشید که این معادله هیچ ربطی به فاز اولیه  $\theta_0$  ندارد. به سادگی می‌توان نشان داد که همیشه یک جواب بدیهی با ویژه مقدار  $\omega_0 = 0$  به فرم  $\Psi_1(x) = \frac{d\varphi_0}{dx}$  وجود دارد. اما در حقیقت این جواب بدیهی، متناظر با یک انتقال بی‌نهایت کوچک برای جواب منفرد کینک (پادکینک) خواهد بود به طوری که:

$$\varphi(x, t) = \varphi_0(x) + \varepsilon \frac{d\varphi_0}{dx} = \varphi_0(x + \varepsilon) \quad (18)$$

اگر چنین فرایندی را برای سیستم  $\varphi^4$  به کار بگیریم، برای پتانسیل کینک مربوط خواهیم داشت:

$$V(x) = 4 - 6 \operatorname{sech}^2(x) \quad (19)$$

با حل معادله شبه شرودینگری (17)، به ازای پتانسیل کینک (19) با روش رانگ-کوتا<sup>1</sup> مرتبه 4، به یک جواب غیر بدیهی<sup>2</sup> برای  $\Psi$  با فرکانس  $\omega_0 = \sqrt{3}$  دست خواهیم یافت [18-16].

در حالت کلی، برای یک کینک (پادکینک) مختل شده متحرک، همانند آنچه که برای یک کینک ساکن (16) انجام دادیم، جوابی به فرم زیر که شامل یک کینک متحرک  $\varphi_0(\tilde{x})$  به همراه اختلالات کم دامنه  $\Psi$  و عامل نوسانی  $e^{i(kx - \omega t)}$  باشد را در نظر می‌گیریم:

$$\varphi(x, t) = \varphi_0(\tilde{x}) + \Psi(x)e^{i(\omega_0 t + \theta_0)} \quad (20)$$

معرفی می‌شوند، می‌توان به طیفی از جواب‌های منفرد پایدار بسته موجی که خصوصیات موجی و ذره‌ای را در یک مدل واحد در کنار هم بدون هیچ گونه تناقضی جمع کرده باشد، دست پیدا کرد. البته این جواب‌ها به لحاظ توپولوژیکی همانند کینک‌ها (پادکینک‌ها) پایدار نیستند، بنابراین چندان مورد اقبال فیزیک‌دانان نمی‌باشند. پایداری توپولوژیکی یعنی هیچ راهی پیدا نمی‌شود بدون نقض قانون بقای انرژی بتوان به صورت پیوسته با ایجاد تغییرات کوچک در شکل جواب منفرد، آن را به سمت یک موجود بسیار پهن با دامنه تقریباً صفر میل داد [27-30].

### کانال داخلی جذب سیستم $\varphi^4$

اگر برای سیستم  $\varphi^4$ ، دو جواب کینک و پادکینک را به صورت عددی با قید شرایط اولیه مناسب، با هم برخورد دهیم، شاهد یک ارتعاش پایسته در نتیجه برخورد جواب‌های غیرهمنام خواهیم بود. در بسیاری از سیستم‌های غیرخطی مشابه، با پتانسل‌های متفاوت، باز هم چنین ارتعاشاتی وجود دارد که خود در حقیقت گواهی از وجود ساختارهای داخلی (کانال‌های داخلی) برای جذب انرژی در این گونه از سیستم‌ها است. برای بررسی این مهم می‌توان به مطالعه جواب‌های منفرد این گونه از سیستم‌ها، تحت تاثیر اختلالات بسیار کوچک، در حالت ایستا پرداخت. برای این منظور حدس می‌زنیم برای سیستم‌های غیرخطی (1) در حالت کلی جواب‌هایی به فرم نوسانی

$$\varphi(x, t) = \varphi_0(x) + \Psi(x)e^{i(\omega_0 t + \theta_0)} \quad (16)$$

وجود داشته باشد که در آن  $\varphi_0(x)$  معرف یک جواب کینک ساکن و  $\Psi(x)$  تابع دامنه اختلالات بسیار کوچک است و  $\theta_0$  صرفاً یک فاز اولیه دلخواه می‌باشد. می‌خواهیم ببینیم تحت چه شرایطی وجود چنین جواب‌هایی، قانونی است و سیستم توانایی ایجاد یک کینک نوسانی را مهیا می‌کند. به عبارت دیگر به دنبال فرکانس‌های مشخصه  $\omega_0$  و  $\Psi(x)$ ‌های قانونی هستیم که می‌توانند یک جواب معادله موج (2) باشند. با جای‌گذاری جواب حدسی (11) در معادله موج (2) و اعمال یک بسط تیلور بر روی جمله  $\frac{dU}{d\varphi}$  و نگه

1. Runge-kuta

2. منظور از جواب، ویژه  $\omega_0$ ‌های خاصی است که ویژه توابع  $\Psi$  متناظر با آنها از دو طرف به سمت صفر میل کنند.

که در واقع رابطه‌ای مشابه با رابطه دوبروی است. در حالت کلی، با یک روش وردشی ساده می‌توان نشان داد که به ازای نوسانات کوچک مجاز با فرکانس  $\omega_0$  انرژی جواب کینک مختل شده زمانی که ما صرفاً تا مرتبه اول بسط را برای محاسبه انرژی کل، لحاظ می‌کنیم، عملاً تغییر نمی‌کند. به عبارت دیگر، انرژی یک کینک غیر نوسانی با یک کینک مختل شده با نوسانات کم دامنه، با تقریب بسیار خوبی یکسان است. در حالت کلی انرژی کلیک جواب منفرد معادله موج (2) به صورت زیر است:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2} (\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2} (\varphi')^2 + U(\varphi) \right] dx, \quad (27)$$

در صورتی که با یک کینک ساکن سروکار داشته باشیم  $\dot{\varphi}_0 = \mathbf{0}$  خواهیم داشت:  $\varphi = \varphi_0(x)$  و انرژی کل به دست آمده برابر با انرژی سکون یک کینک  $E_0$  است. حال با توجه به رابطه (16) و با قید تغییراتی به صورت  $\delta\varphi = \Psi(x)e^{i(\omega_0 t)}$  برای یک کینک ساکن، میزان تغییرات در انرژی کل (27) با قید دور انداختن جملاتی با مرتبه بزرگ‌تر از  $\delta\varphi$ ، به نتیجه زیر می‌رسد:

$$\delta E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \varphi'_0 \psi' + \frac{dU}{d\varphi} \psi \right] e^{i(\omega_0 t)} dx = \mathbf{0} \quad (28)$$

به سادگی، با اعمال نتیجه (5) برای یک جواب کینک ساکن و در رابطه (28)، می‌توان نتیجه زیر را به دست آورد:

$$\delta E = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx} (\psi \varphi'_0) e^{i(\omega_0 t)} dx = \mathbf{0} \quad (29)$$

به دلیل صفر شدن  $\varphi'_0$  (مشتق مکانی جواب کینک ساکن) بر روی مرزها در  $\pm\infty$ ، به سادگی صفر شدن انتگرال بالا درک خواهد شد. برخلاف سیستم  $\varphi^4$ ، سیستم معروف سینوسی گوردون که با پتانسیل معروف

$$U(\varphi) = 1 - \cos(\varphi) \quad (30)$$

که در آن  $k_\mu = (k, -\omega)$  یک بردار نسبتی است و  $\tilde{x} = \gamma(x - vt)$  مجدداً با قرار دادن این جواب خاص در معادله دینامیکی (2) و بسط آن تا مرتبه اول  $\Psi$  و برابر قرار دادن قسمت‌های حقیقی و موهومی، به صورت جداگانه، به نتایج زیر می‌رسیم:

$$-\frac{d^2 \Psi}{d\tilde{x}^2} + \mathbf{V}(\tilde{x})\Psi = (\omega^2 - k^2)\Psi \quad (21)$$

$$k = \omega v \quad (22)$$

برای اینکه نتیجه معادله (21)، با معادله (17) که در واقع معادله نوسانات مجاز برای اختلالات کم دامنه یک کینک ساکن بود، هماهنگی داشته باشد، می‌بایست رابطه زیر برقرار باشد:

$$\omega^2 - k^2 = \omega_0^2 \quad (23)$$

با ترکیب این نتیجه با رابطه (22)، به دست خواهیم آورد:

$$\omega = \gamma\omega_0 \quad (24)$$

بنابراین رابطه بین فرکانس یک کینک متحرک با یک کینک ساکن دقیقاً مشابه رابطه نسبیتی بین انرژی سکون و انرژی کل یک کینک متحرک است (13) و کاملاً طبیعی است که از طریق معرفی یک ثابت شبه پلانک بتوانیم بین این دو ارتباط برقرار نماییم:

$$\mathbf{E} = \hbar\omega \quad (25)$$

به طور مشابه همچنین می‌توان رابطه‌ای بین تکانه نسبیتی یک حل کینک و عدد موج مربوط به نوسانات قانونی آن به دست آورد:

$$p = \hbar k \quad (26)$$

برای این منظور یک فضای مشبک دو بعدی از نقاط را در فضا- زمان طراحی می‌کنیم.

فواصل کوچک زمانی و مکانی را با  $h$  و  $s$  مشخص می‌کنیم. برای اینکه برنامه واگرایی نداشته باشد می‌بایست نسبت  $r = \frac{k}{s}$  کمتر از یک باشد. برای اجرای برنامه لازم است که به صورت عددی، شرایط اولیه را برای لحظات اولیه  $t = 0$  و  $t = s$  مشخص کنیم. بدین منظور، یک زوج کینک- پادکینک مختل شده متحرک با تندی‌های اولیه  $v_1$  و  $v_2$  که در فاصله دوری از هم قرار گرفته‌اند را در لحظات اولیه  $t = 0$  و  $t = k$ ، به عنوان شرایط اولیه به صورت زیر به خورد برنامه می‌دهیم:

$$\begin{aligned} \varphi(x, 0) &= \varphi_1(x, 0) + \varphi_2(x, 0) - 1 \\ &= -1 + \tanh(\gamma_1(x - a)) + \\ &+ Co_1 \psi(\gamma_1(x - a)) \sin(\omega_1 v_1(x - a) + \theta_1) \\ &+ \tanh(-\gamma_2(x - b)) + \\ &+ Co_2 \psi(\gamma_2(x - b)) \sin(\omega_2 v_2(x - b) \\ &+ \theta_2) \end{aligned} \quad (31)$$

و

$$\begin{aligned} \varphi(x, s) &= \varphi_1(x, s) + \varphi_2(x, s) - 1 \\ &= -1 + \tanh(\gamma_1(x - a - v_1 s)) + \\ &+ Co_1 \psi(\gamma_1(x - a - v_1 s)) \times \\ &\sin(\omega_1 v_1(x - a - v_1 s) + \theta_1) \\ &+ \tanh(\gamma_2(x - b - v_2 s)) + \\ &+ Co_2 \psi(\gamma_2(x - b - v_2 s)) \times \\ &\sin(\omega_2 v_2(x - b - v_2 s) + \theta_2), \quad \mathbf{b - a} \gg \mathbf{0} \end{aligned} \quad (32)$$

در اینجا،  $a$  و  $b$  مکان‌های اولیه جواب‌های کینک و پادکینک مختل شده هستند.

برای اینکه مطمئن باشیم اختلالات اعمالی به جواب کینک متحرک  $\tanh[\gamma_1(x - a - v_1 t)]$  و جواب پادکینک متحرک  $\tanh[-\gamma_2(x - b - v_2 t)]$  کوچک هستند، با وارد کردن دو ضریب کوچک  $Co_1$  و  $Co_2$  برای تابع اختلالی  $\psi$ ، که به صورت جداگانه از یک

شناخته می‌شود، هیچ گونه مد داخلی غیر بدیهی ندارد. نتایج عددی به خوبی نشان می‌دهند که در برخورد بین جواب‌های کینک- پادکینک سیستم سینوسی گوردون، همیشه بدون کوچک‌ترین تغییری بعد از برخورد مجدداً ظاهر می‌شوند و این دقیقاً همان چیزی است که انتظار آن می‌رفت. در این راستا تلاش برای یافتن سیستم‌هایی همانند سیستم سینوسی گوردون با تنها یک مد داخلی، می‌تواند به جواب‌های کینک (پادکینک) متفاوتی ختم شود که در برخوردها، رفتاری همانند رفتار کینک‌ها و پادکینک‌های سیستم سینوسی گوردون رقم بزنند. به عنوان مثال، مقاله [17]، روشی را برای رسیدن به دسته‌ای از سیستم‌های غیرخطی  $\varphi^6$ ، با تنها یک مد داخلی بدیهی، همانند سیستم سینوسی گوردون معرفی کرده است.

این مقاله به خوبی نشان داده است که برای سیستم‌هایی با یک تک مد داخلی، رفتارهایی بسیار شبیه سیستم سینوسی گوردون مشاهده می‌شود و همیشه در نتیجه فرایند برخورد، شاهد ظهور مجدد زوج کینک- پادکینک‌ها هستیم.

برای نوع خاصی از این سیستم‌ها که در اصطلاح آنها را سیستم‌های تابشی می‌نامیم، چنانچه فرم پتانسیل کینک وابسته به آنها در حد  $x \rightarrow \pm\infty$  به سمت صفر میل کند، شاهد بروز رفتارهای جالب و متفاوتی هستیم. برای مثال برای سیستم‌های تابشی، اگر تندی برخوردها از حد خاصی کمتر شود، شاهد نابودی مطلق زوج کینک- پادکینک و تبدیل آن به دو بسته موج که با سرعتی نزدیک به سرعت نور حرکت می‌کنند، خواهیم بود [18].

## عوامل موثر بر عدم قطعیت خروجی برخوردهای کینک- پادکینک

با استفاده از روش عددی تفاسیل محدود<sup>1</sup>، می‌توان برخورد بین یک زوج کینک- پادکینک سیستم  $\varphi^4$  را مطالعه کرد.

معرفی می‌شوند. به مرور زمان و در هرگام زمانی جدید، دو نقطه انتهای گام قبل، دیگر، در گام زمانی جدید محاسبه نمی‌شوند. با این روال، در نهایت و در گام زمانی نهایی، تنها نقاطی محاسبه می‌شوند که در بازه مکانی خواسته شده بین  $x_1$  و  $x_2$  قرار گرفته‌اند (یعنی قاعده کوچک دوزنقه). در این روش، برای تعداد زیادی از نقاط که به لحاظ مکانی فراتر از ناحیه مد نظر ما قرار می‌گیرند و به صورت هندسی دو مثلث قائم الزاویه را تشکیل می‌دهند، محاسبه انجام می‌شود؛ اما همان طور که گفته شد در خروجی برنامه دیده نمی‌شوند. اهمیت این روش در این است که برای نقاط روی دیواره‌های  $x_1$  و  $x_2$ ، چیزی را دستی ثابت نگذاشته‌ایم و دقیقا مطابق آنچه که باید باشد، نتایج با تقریب بسیار خوبی حاصل می‌شوند.

درباره فازهای اولیه  $\theta_1$  و  $\theta_2$ ، کاملا ساده می‌توان متوجه شد که تاثیر آنها در خصوصیات ذره‌ای جواب‌های منفرد همانند جرم سکون، بار توپولوژیک، مدهای داخلی و تکانه، صفر و یا تقریبا صفر است. نتایج به دست آمده از شبیه‌سازی‌های عددی حاصل از برخورد جواب‌های کینک-پادکینک که به ازای ضرایب مختلف اختلال  $CO_1$ ،  $CO_2$  و فازهای مختلف اولیه  $\theta_1$  و  $\theta_2$  انجام شده است، نشان می‌دهند که علی‌رغم تصور قابل انتظار مبنی بر بی‌اهمیت بودن نقش اختلالات کم دامنه و به ویژه فازهای اولیه  $\theta_1$  و  $\theta_2$ ، شاهد وجود وابستگی‌های قابل ملاحظه در خروجی برخوردها به اختلالات کم دامنه و به خصوص فازهای اولیه هستیم (شکل‌های 1 تا 9). به طور خاص، شکل‌های 1 و 2 به خوبی تاثیر مقادیر متفاوت فاز اولیه را در عدم قطعیت‌ها نشان می‌دهد. شکل‌های 3 و 4، فقط تاثیر مقادیر متفاوت ضریب اختلال در عدم قطعیت خروجی برخوردها را نشان می‌دهد.

در مقایسه با سیستم خوش تعریف و شناخته شده سینوسی گوردون با پتانسیل (30) که جواب‌های آن به معنای حقیقی سالیتون هستند (یعنی بدون هیچ گونه تغییری پس از برخورد مجددا ظاهر می‌شوند)، سیستم غیرخطی  $\phi^4$ ، این گونه رفتار نمی‌کند و برای تندی‌های

روش رانگ-کوتا به دست آمده است، این مهم را تحقق می‌بخشیم. بنابراین با قید این شرایط اولیه و روش تفاضلی محدود، می‌توانیم اثرات اختلالات کوچک به همراه فازهای دلخواه را در خروجی برخوردها، شبیه‌سازی کنیم.

درباره شرایط مرزی باید به شکلی، زوج کینک-پادکینک (پادکینک-کینک) را با هم جمع بندیم که نتیجه حاصل در حد  $-\infty$  به سمت  $1- (+1)$  و در حد  $+\infty$  به سمت  $1+ (-1)$  میل کند. در غیر این صورت، خروجی این جمع بستن ساده در لحظات اولیه به دو قله مجزا و دور از چگالی انرژی، همانند ذرات مجزا، ختم نمی‌شود.

برای اینکه این مهم تحقق پیدا کند، می‌بایست در تعریف شرایط اولیه عمدا عدد  $1- (+1)$  را به مجموع کینک-پادکینک اضافه کرد. علاوه بر این، در روش تفاضلی محدود، نیاز است که شرایط مرزی در تمام زمان‌های اجرای برنامه مشخص باشند. در واقع، خروجی شبیه‌سازی قرار است در یک ناحیه کوچک مکانی بین  $x_1$  و  $x_2$  به نمایش گذاشته شود.

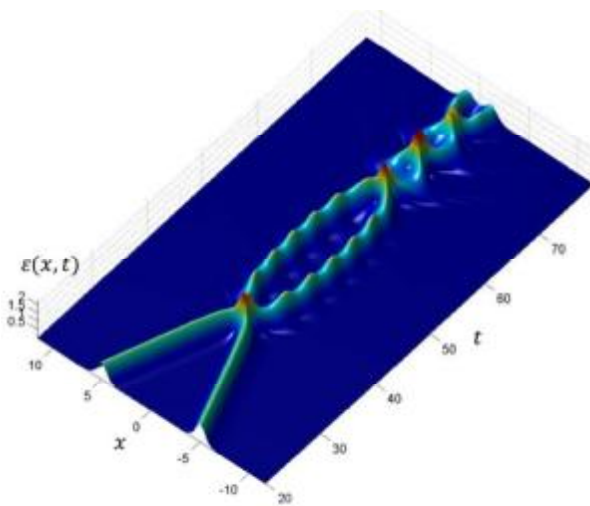
در روش معمول، شبکه نقاط فضا-زمانی معمولا به صورت یک ناحیه مستطیلی در نظر گرفته می‌شود که دیوارهای  $x_1$  و  $x_2$ ، آنها را کاملا در برمی‌گیرند. در این روش، مقدار تابع موج  $\phi$  حاصل برخورد کینک-پادکینک در تمام زمان‌ها، روی دیوار  $x_1$  برابر با  $1-$  ( $1+$ ) و روی دیوار  $x_2$  برابر با  $1+ (-1)$  ثابت است. در این روش، مرزها همانند دیوارهای صلب عمل می‌کنند و در صورت برخورد یک کینک (پادکینک) با آنها، به طور کامل در جهت عکس بازتاب می‌یابند. با وجود سادگی و گستردگی این شیوه برای به کارگیری روش تفاضلی محدود، ما از آن استفاده نمی‌کنیم. در واقع وجود دیواره‌های صلب به خودی خود باعث ایجاد اختلالاتی کم دامنه می‌شود که می‌تواند بر دقت نتایج عددی مد نظر ما تاثیرگذار باشد، به ویژه اینکه می‌خواهیم نقش اختلالات قانونی کم دامنه را در خروجی برخوردها مطالعه کنیم.

روشی که در اینجا به کار می‌گیریم، استفاده از یک شبکه دوزنقه‌ای شکل به جای شبکه‌ای مستطیلی شکل است. شرایط اولیه، ابتدا، برای نقاط قاعده بزرگ دوزنقه



نشان می‌دهیم که خصوصیت‌های غیرخطی، درباره مفهوم ذرات به عنوان برجستگی‌هایی از کمیت چگالی انرژی در فضا، برخلاف تصور ذهن کلاسیکی ما، می‌تواند به نتایجی کاملاً دور از تصور منتهی شود، چیزی که عدم قطعیت می‌نامیم.

در این مقاله، با به کارگیری یک سیستم کلاسیکی از میدان‌های نسبیتی با جواب‌های کینک (پادکینک)، به خوبی نشان دادیم که کمیتی مانند فاز اولیه که در خصوصیات ذره‌ای جواب‌ها هیچ گونه تاثیری ندارد، در عمل، زمانی که ذره قرار است برهمکنش داشته باشد، تاثیر بسیار شگرفی از خود بر جای می‌گذارد. در واقع ما با کمیتی روبه رو هستیم که به هیچ وجه قابل اندازه‌گیری نیست ولی از عوامل اصلی ایجاد عدم قطعیت در برخوردها است، کمیتی که کاملاً آزاد و احتمالاتی ولی در نتیجه برهمکنش‌ها بسیار تاثیرگذار است.



شکل 1. برخورد بین یک زوج کینک-پادکینک با تندی‌های اولیه

$$Co_1 = 0.005 = Co_2 \quad v = 249c$$

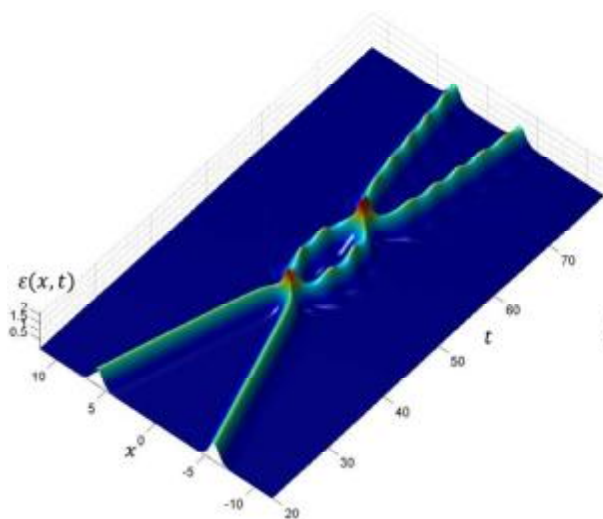
$$\theta_2 = 0 \quad \theta_1 = 0$$

برخوردی کمتر از یک تندی مشخص  $v = 0.256$ ، در فرایند برخورد بین یک زوج کینک-پادکینک سیستم  $\varphi^4$ ، احتمال جذب و تشکیل یک موجود نوسانی غیرتوپولوژیک<sup>1</sup> وجود خواهد داشت. عملاً با کاهش تندی برخوردی بین زوج‌های کینک-پادکینک، شانس جذب در مقایسه با پراکندگی افزایش می‌یابد. نتایج عددی نشان می‌دهند که در میانه طیف پیوسته‌ای از تندی‌هایی که به ازای آنها برای زوج کینک-پادکینک‌های غیراختلالی فرایند جذب رقم می‌خورد، نوارهای بسیار باریکی از تندی‌های مجاز دیده می‌شود که به ازای آنها، فرایند پراکندگی به جای جذب، رقم می‌خورد. به چنین تندی‌های خاصی که در یک طیف پیوسته از تندی‌های جذب قرار می‌گیرد، در اصطلاح، دریچه‌های پراکندگی می‌گوییم.

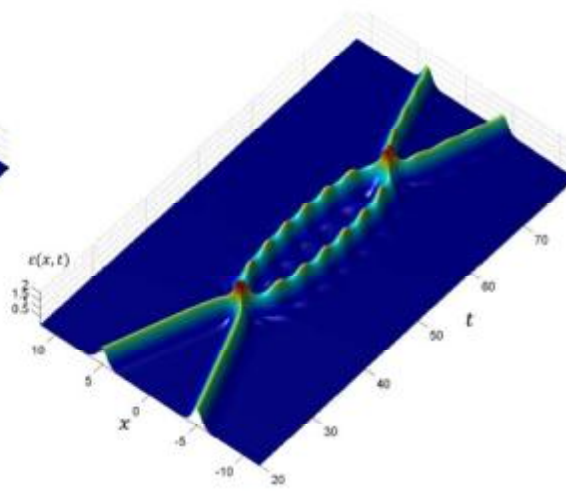
برای مثال برای تندی‌های برخوردی کمتر از  $v = 0.182$  و بیشتر از  $v = 0.184$ ، در طول یک بازه چشمگیر، همیشه فرایند جذب زوج کینک و پادکینک را مشاهده می‌کنیم (شکل‌های 5 و 6). ولی برای نمون خاص  $v = 0.183$  (شکل 7)، این رفتار عجیب و پیش‌بینی نشده از وجود دریچه‌های پراکندگی که به صورت مطلق و دقیق و نه تحت تاثیر یک فرایند اختلالی رقم می‌خورد، گواهی بر این حقیقت است که برخلاف مدل‌های خطی، تصور وجود یک دنیای غیرخطی تا حد زیادی می‌تواند بر مرموز بودن و پیش‌بینی‌پذیر نبودن رویدادها تاثیرگذار باشد! با این وجود، چنانچه برای مطالعه دریچه‌های پراکندگی از زوج کینک-پادکینک‌های اختلالی استفاده کنیم، رفتارها تغییر می‌کنند و دریچه‌های پراکندگی متناظر با مقادیر فاز اولیه و دامنه اختلالات کم دامنه تحمیل شده به آنها، به نحو چشم‌گیری جابه‌جا می‌شوند (رجوع شود به شکل‌های 7-9).

## بحث و نتیجه‌گیری

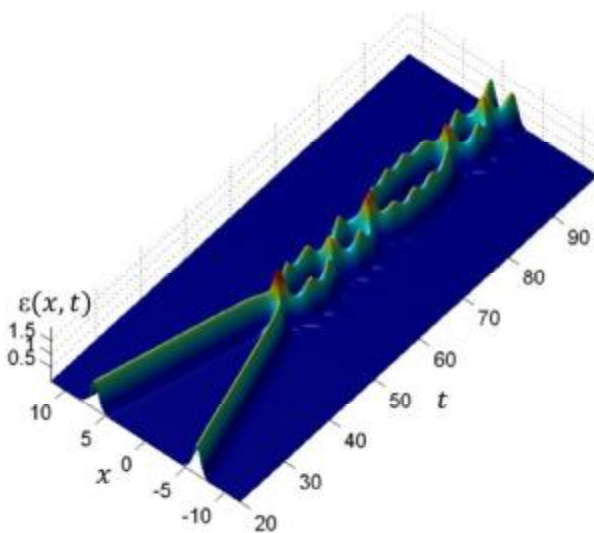
درست مشابه با مبحث متغیرهای نهان در مکانیک کوانتومی معمولی، در اینجا، با یک روش کاملاً کلاسیک



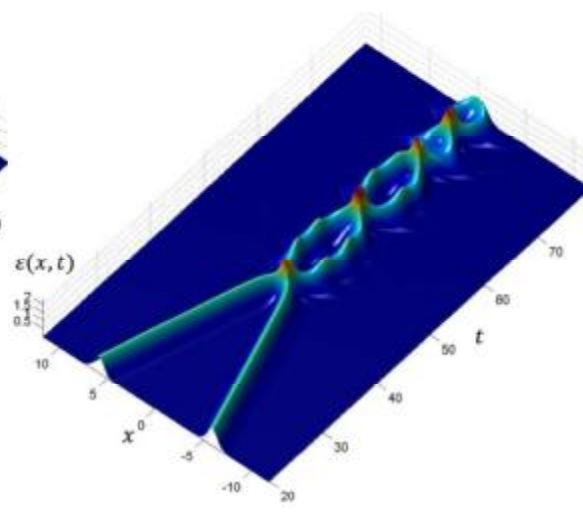
شکل 4. برخورد بین یک زوج کینک-پادکینک با تندی‌های اولیه  $v = 206c$  و ضریب اختلال  $Co_1 = 0.005 = Co_2$  و فازهای اولیه  $\theta_1 = 0$  و  $\theta_2 = 0$ .



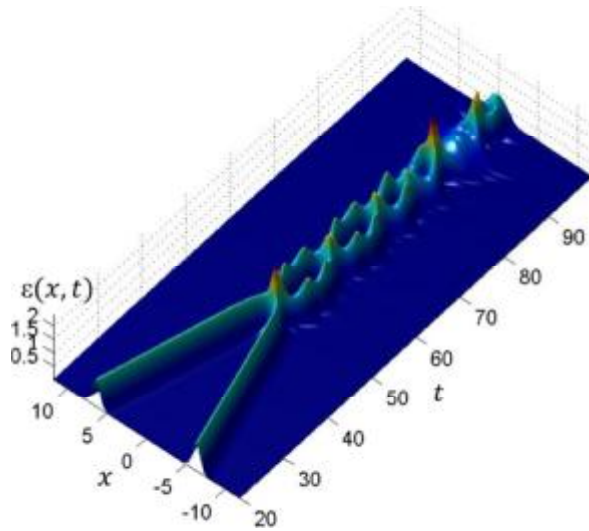
شکل 2. برخورد بین یک زوج کینک-پادکینک با تندی‌های اولیه  $v = 249c$  و ضریب اختلال  $Co_1 = 0.005 = Co_2$  و فازهای اولیه  $\theta_1 = 0$  و  $\theta_2 = \pi$ .



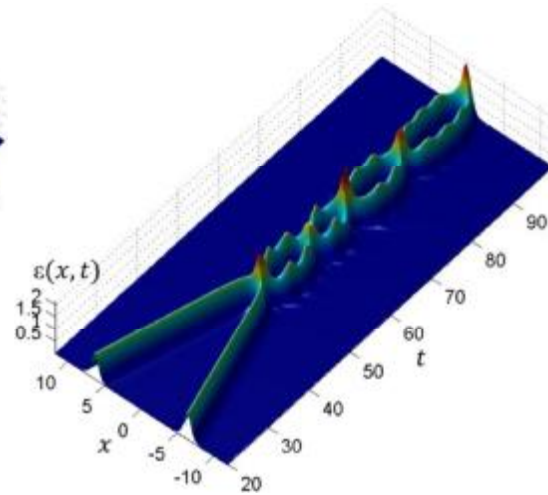
شکل 5. برخورد بین یک زوج کینک-پادکینک غیر اختلالی با تندی‌های اولیه  $v = 182c$ .



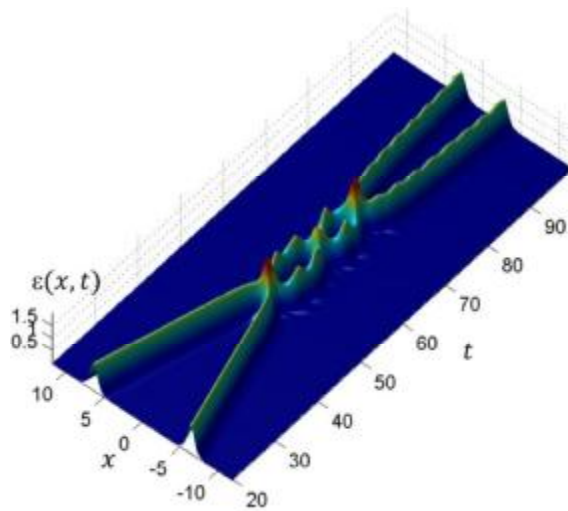
شکل 3. برخورد بین یک زوج کینک-پادکینک غیر اختلالی با تندی‌های اولیه  $v = 206c$  ( $Co_1 = 0 = Co_2$ ).



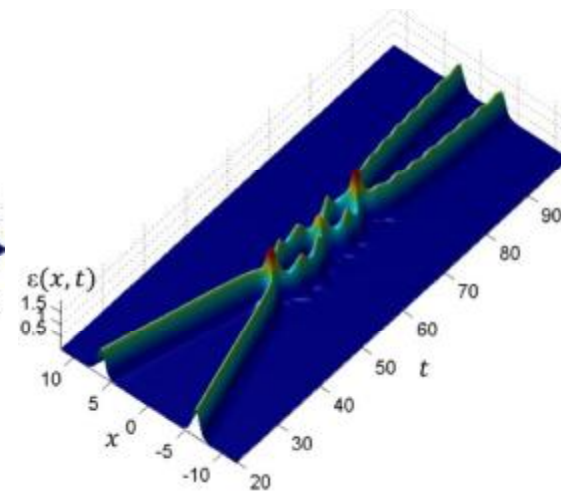
شکل 8. برخورد بین یک زوج کینک-پادکینک با تندی‌های اولیه  $\nu = 183c$  و ضریب اختلال  $Co_1 = 0.005$  و فازهای اولیه  $\theta_1 = 0$  و  $\theta_2 = 0$ .



شکل 6. برخورد بین یک زوج کینک-پادکینک با تندی‌های اولیه  $\nu = 184c$  و ضریب اختلال  $Co_1 = 0 = Co_2$ .



شکل 9. برخورد بین یک زوج کینک-پادکینک با تندی‌های اولیه  $\nu = 183c$  و ضریب اختلال  $Co_1 = 0.005 = Co_2$  و فازهای اولیه  $\theta_1 = 0$  و  $\theta_2 = \pi$ .



شکل 7. برخورد بین یک زوج کینک-پادکینک غیر اختلالی با تندی‌های اولیه  $\nu = 183c$ .

## References

- [1] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons*, Elsevier, Amsterdam, 1982.
- [2] A. Das, *Integrable Models*, World Scientific, Singapore, 1989.
- [3] G. L. Lamb, Jr., *Elements of Soliton Theory*, Wiley, New York, 1980.
- [4] P. G. Drazin and R. S. Johnson, *Solitons: an Introduction*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1989.
- [5] R. Khomeriki and J. Leon, *Phys. Rev. E* 71 (2005) 056620.
- [6] N. Riazi, A. Azizi and S. M. Zebarjad, *Phys. Rev. D* 66 (2002) 065003.
- [7] L. V. Yakushevich, *Nonlinear Physics of DNA*, Wiley, 2004.
- [8] L. V. Yakushevich, A. V. Savin and L. I. Manevitch, *Phys. Rev. E* 66 (2002) 016614.
- [9] S. Cuenda, A. Sanchez and N. R. Quintero, *Physica D* 223 (2006) 214.
- [10] J. Timonen, M. Stirland, D. J. Pilling, Y. Cheng and R. K. Bullough, *Phys. Rev. Lett.* 56 (1986) 2233.
- [11] D. K. Campbell and M. Peyrard, *Physica D* 19 (1986) 165.
- [12] D. K. Campbell and M. Peyrard, *Physica D* 18 (1986) 47.
- [13] D. K. Campbell, J. S. Schonfeld, and C. A. Wingate, *Physica D* 9 (1983) 1.
- [14] M. Peyrard and D. K. Campbell, *Physica D* 9 (1983) 33.
- [15] R. H. Goodman and R. Haberman, *Siam J. Appl. Dyn. Syst.* 4 (2005) 1195.
- [16] A. R. Gharaati, N. Riazi and F. Mohebbi, *Int. J. Theor. Phys.* 45 (2006) 57.
- [17] M. Mohammadi and N. Riazi, *Prog. Theor. Phys.* 126 (2011) 237.
- [18] M. Mohammadi, N. Riazi, and A. Azizi, *Prog. Theor. Phys.* 128 (2012) 615.
- [19] S. Hoseinmardi and N. Riazi, *Int. J. Mod. Phys. A* 25 (2010) 3261.
- [20] M. Mohammadi, N. Riazi, *Prog. Theor. Exp. Phys* 023 A03 (2014).
- [21] Dorey, Patrick et al., *JHEP* 1705 (2017) 107.
- [22] Dorey, Patrick et al., *Phys. Rev. Lett.* 107, (2011) 091602.
- [23] T. H. R. Skyrme, *Proc. Roy. Soc. A* 260 (1961) 127.
- [24] G. 't Hooft, *Nuclear Physics B* 79 (1974) 276.
- [25] A. M. Polyakov, *JETP Lett.* 20 (1974) 194.
- [26] G. H. Derrick, *Journal of Mathematical Physics* 5 (1964) 1252.
- [27] R. Friedberg, T. D. Lee and A. Sirlin *Phys.* 13 (1976) 2739.
- [28] J. Werle. *Acta Phys. Pol.* B12 (1981) 601.
- [29] N. Riazi, *Int. J. Theor. Phys.* 50 (2011) 3451.
- [30] R. Abazari and S. Jamshidzadeh, *Optik* vol. 126 (2015) 1970-1975.