

حالت‌های همدوس فوتون کاهیده برای نوسانگرهای ناهماهنگ در یک محیط غیرخطی کر

فرشید جهان‌بخش^{1*}، غلامرضا هنرآسا²، علیرضا کشاورز³

1. دانشجوی کارشناسی ارشد، فیزیک، دانشگاه صنعتی شیراز

2. استادیار، فیزیک، دانشگاه صنعتی شیراز

3. استاد، فیزیک، دانشگاه صنعتی شیراز

تاریخ دریافت: 1396/05/01 تاریخ پذیرش: 1396/06/27

Photon Subtracted Coherent States for Nonharmonic Oscillators in a Nonlinear Kerr Medium

F. Jahanbakhsh^{*1}, G. Honarasa², A. Keshavarz³

1. MsC. Student, Physics, Shiraz University of Technology

2. Assistant Professor, Physics, Shiraz University of Technology

3. Professor, Physics, Shiraz University of Technology

Received: 2017/07/23 Accepted: 2017/09/18

Abstract

In this paper, the photon subtracted generalized coherent states for nonharmonic oscillators in a nonlinear Kerr medium have been introduced. Then, the number- phase Wigner function of the introduced states was investigated. The Wigner function was negative in some regions which showed the nonclassical signature of these states. Finally, the phase properties of these states were discussed by using Pegg-Barnett phase distribution function formalism which showed that this distribution function has higher and sharper peaks for smaller m and thus, it was more localized with respect to q . Finally, number- phase squeezing and number- phase entropy uncertainty relation for these states were investigated. By studying the number- phase squeezing can be concluded that these states are nonclassical signature.

Keywords

Coherent States, Photon Subtracted, Nonharmonic Oscillator, Squeezing, Nonlinear Kerr Medium.

چکیده

در این مقاله حالت‌های همدوس تعمیم‌یافته فوتون کاهیده برای نوسانگرهای ناهماهنگ در یک محیط غیرخطی کر معرفی شده است. سپس تابع ویگنر تعداد- فاز حالت‌های معرفی شده بررسی شده است. تابع ویگنر در بعضی از ناحیه‌ها منفی شده است که ماهیت غیرکلاسیکی این حالت‌ها را نشان می‌دهد. در نهایت ویژگی‌های فازی این حالت‌ها با استفاده از روش تابع توزیع فاز پگ- بارنت مورد بحث قرار گرفته است که نشان می‌دهد این تابع توزیع به ازای m های کمتر قله بلندتر و تیزتری دارد و بنابراین نسبت به q جای‌گزیده‌تر است. در نهایت چلانندگی تعداد- فاز و همچنین رابطه عدم قطعیت آنتروپی تعداد- فاز برای این حالت‌ها بررسی شده است. با بررسی چلانندگی تعداد- فاز می‌توان نتیجه گرفت که این حالت‌ها ماهیت غیرکلاسیکی دارند.

واژگان کلیدی

حالت‌های همدوس، فوتون کاهیده، نوسانگر ناهماهنگ، چلانندگی، محیط غیرخطی کر.

مقدمه

حالت همدوس استاندارد در مکانیک کوانتومی نوع خاصی از حالت‌های کوانتومی است که دینامیک آن مشابه رفتار نوسانی یک نوسانگر هماهنگ کلاسیک است و اروین شرودینگر ضمن مطالعه نوسانگر هماهنگ کوانتومی به عنوان مبنایی برای بررسی و توصیف میدان تابشی در سال 1926 معرفی کرد [1]. اخیراً حالت‌های همدوس برای نوسانگر هارمونیک و دیگر سیستم‌ها توجه زیادی را به خود جلب کرده است که نقش مهمی را در زمینه‌های اپتیک کوانتومی ایفا می‌کنند [2, 3]. پتانسیل‌های سیستم ناهماهنگ کاربردهای زیادی در فیزیک نظری و تجربی دارند که می‌توانند برای توصیف تعداد زیادی از سیستم‌های مکانیک کوانتوم استفاده شوند [2, 4]. حالت‌های همدوس نوسانگر ناهماهنگ می‌توانند بسیار مفید باشند و اطلاعات بیشتری را در این زمینه‌ها در اختیار ما قرار دهند. با انگیزه یافتن ویژگی‌های غیرکلاسیکی و ویژگی‌های فازی حالت‌های کوانتومی مختلف مربوط به سیستم‌های کوانتومی متعدد، تاکنون تعمیم‌های زیادی روی حالت‌های همدوس استاندارد صورت گرفته است که از جمله مهم‌ترین آنها می‌توان به حالت‌های همدوس فوتون افزوده و فوتون کاهیده اشاره کرد. حالت‌های همدوس فوتون افزوده برای نوسانگرهای ناهماهنگ در یک محیط غیرخطی کر در سال 2015 معرفی شده است [5]. در این مقاله حالت‌های همدوس فوتون کاهیده را برای نوسانگرهای ناهماهنگ در یک محیط غیرخطی کر معرفی خواهیم کرد و ویژگی‌های فازی آنها را بررسی خواهیم کرد.

تولید حالت‌های همدوس تعمیم‌یافته فوتون کاهیده برای نوسانگر ناهماهنگ در یک محیط غیرخطی کر

همایلتونی مربوط به نوسانگرهای ناهماهنگ به صورت زیر تعریف می‌شود [5]:

$$H = wa^\dagger a + c(a^\dagger)^2 a^2 \quad (1)$$

که a و a^\dagger به ترتیب عملگرهای نابودی و خلق هستند. همچنین c ، ثابت جفت‌شدگی است که با پذیرفتاری غیرخطی مرتبه 3 محیط کر $c^{(3)}$ ارتباط دارد. برای معادله ویژه مقداری مربوط به این همایلتونی داریم:

$$\hat{H}|n\rangle = E_{n,m}|n\rangle \quad n^3 \neq 0 \quad (2)$$

که در آن

$$E_{n,m} = c(n^2 + m), \quad m = \frac{w - c}{c} \quad (3)$$

اثر عملگر نابودی جبر هایزنبرگ تعمیم‌یافته A روی حالت‌های عددی به شکل زیر است:

$$A|n\rangle = \sqrt{n^2 + m}|n - 1\rangle \quad (4)$$

حالت‌های همدوس مربوط به نوسانگرهای ناهماهنگ در یک محیط غیرخطی کر به این صورت تعریف می‌شوند [5]:

$$|z\rangle = N(|z|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{g(n)}} |n\rangle \quad (5)$$

که در آن $N(|z|^2)$ ثابت بهنجارش است و همچنین

$$g(n) = \prod_{i=1}^n (i^2 + m) = \frac{n!(n+m)!}{m!}, \quad g(0) = 1 \quad (6)$$

این حالت‌ها در حالت حدی $c \otimes 0$ یا $g(n) \otimes n$ ، به حالت‌های همدوس (نوسانگر هماهنگ) تبدیل می‌شوند. با استفاده از روابط

$$(A)^m |n\rangle = \sqrt{\frac{n!(n+m)!}{(n-m)!(n+m-m)!}} |n-m\rangle \quad (7)$$

$$(A^\dagger)^m |n\rangle = \sqrt{\frac{(n+m)!(n+m+m)!}{n!(n+m)!}} |n+m\rangle \quad (8)$$

تابع توزیع ویگنر تعداد- فاز

تابع توزیع ویگنر را برای اولین بار ویگنر در سال 1932 معرفی کرد [6]. تابع ویگنر می‌تواند برای یافتن رفتارهای غیرکلاسیکی حالت‌های کوانتومی مفید واقع شود. برای حالت‌های کوانتومی مشخص، این تابع ممکن است مقادیر منفی را در بخش‌هایی از فضای فاز به دست دهد، وضعیتی که از نظر کلاسیکی ناممکن است؛ بنابراین منفی شدن این تابع توزیع در فضای فاز می‌تواند طبیعت غیرکلاسیکی حالت‌ها را نمایش دهد.

تابع توزیع ویگنر، آمار کوانتومی تعداد فوتون‌ها و فاز یک میدان تک مد را توصیف می‌کند. عملگر ویگنر تعداد- فاز به شکل زیر تعریف می‌شود [7, 8]:

$$w_{np}(n, q) = \frac{1}{2p} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{a}^n e^{2ipq} |n+p\rangle \langle n-p| + \hat{a}^{n-1} e^{i(2p+1)q} |n+p\rangle \langle n-p-1| \hat{y} \hat{b} \quad (13)$$

که در آن $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ و q نیز حقیقی است. تابع توزیع ویگنر تعداد- فاز برای هر حالتی به صورت مقدار چشم‌داشتی عملگر ویگنر تعداد- فاز روی آن حالت تعریف می‌شود؛ بنابراین برای حالت‌های همدوس فوتون کاهیده نوسانگر ناهماهنگ در یک محیط غیرخطی کر داریم:

$$W_{np}(n, q) = \langle z, -m | w_{np} | z, -m \rangle \quad (14)$$

بنابراین تابع توزیع ویگنر مربوط به حالت‌های همدوس فوتون کاهیده برای نوسانگرهای ناهماهنگ در یک محیط غیرخطی کر به این صورت بیان می‌شود:

و همچنین

$$(A^\dagger)^{-m} |n\rangle = \sqrt{\frac{(n-m)!(n-m+m)!}{n!(n+m)!}} |n-m\rangle \quad (9)$$

می‌توان حالت‌های همدوس فوتون کاهیده را به صورت زیر تعریف کرد

$$|z, -m\rangle = (A^\dagger)^{-m} |z\rangle \quad (10)$$

در نتیجه با استفاده از رابطه (9) برای حالت‌های همدوس فوتون کاهیده نوسانگرهای ناهماهنگ در یک محیط غیرخطی کر به رابطه زیر خواهیم رسید:

$$|z, -m\rangle = N_m(|z|^2) \cdot \hat{a}^{\otimes m} \sqrt{\frac{m!(n-m)!(n-m+m)!}{(n!(n+m)!)^2}} z^n |n-m\rangle \quad (11)$$

که با کم کردن m فوتون از یک نوسانگر ناهماهنگ

مرسوم به این رابطه خواهیم رسید و در آن $N_m(|z|^2)$ ثابت بهنجارش است که با استفاده از رابطه‌ی $\langle z, -m | z, -m \rangle = 1$ به صورت زیر به دست می‌آید:

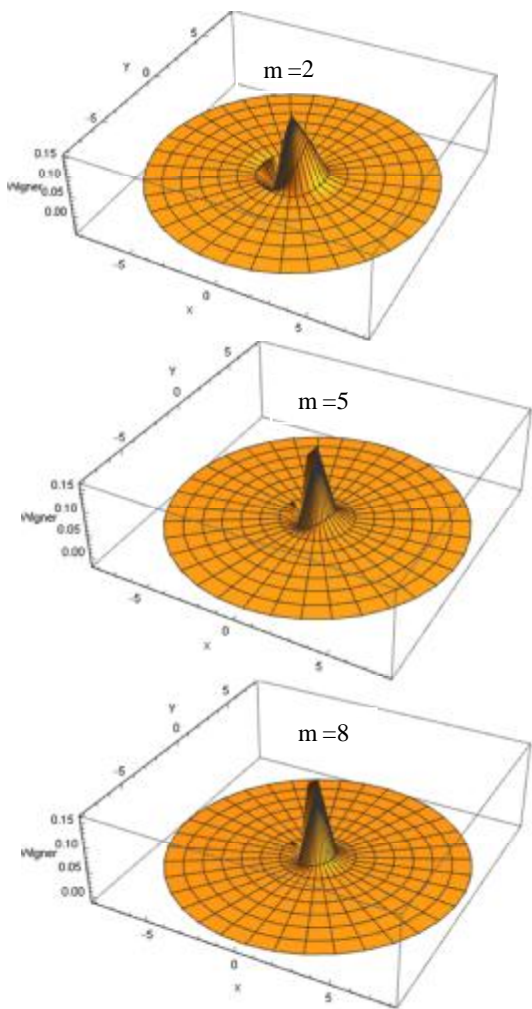
$$N_m(|z|^2) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{a}^{\otimes m} \frac{m!(n-m)!(n-m+m)!}{(n!(n+m)!)^2} |z|^{2n} \hat{\rho}^{-1} \quad (12)$$

که در آن m یک عدد صحیح مثبت و تعداد فوتون‌های کم شده است.

ویژگی‌های فازی حالت‌های همدوس فوتون کاهیده معرفی شده

در این بخش ویژگی‌های فازی حالت‌های همدوس فوتون کاهیده برای نوسانگر ناهماهنگ در یک محیط غیرخطی کر را بررسی خواهیم کرد.

که در این رابطه $\{|n\rangle\}_{n=0}^s$ حالت‌های عددی هستند و q_p شامل تمام مقادیر حقیقی است. تنها حالت‌هایی با مقادیر q متعامد هستند که به اندازه ضریبی از $2p/s+1$ با یکدیگر فاصله داشته باشند،



شکل 1. تابع ویگنر تعداد- فاز به ازای m های مختلف با $z=2$ و $m=1$ متناظر با حالت‌های همدوس فوتون کاهیده برای نوسانگرهای ناهماهنگ در یک محیط غیرخطی

$$\begin{aligned}
 W_{np}(n,q) &= \frac{N_m^2(|z|^2)}{2p} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m!(n-p)!(n-p+m)!}{((n-p+m)!(n-p+m+m)!)^2} \\
 &\quad e^{2ipq} (z^*)^{n+p+m} z^{n-p+m} \\
 &\quad \frac{m!(n+p)!(n+p+m)!}{((n+p+m)!(n+p+m+m)!)^2} \\
 &\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m!(n-p-1)!(n-p+m-1)!}{((n-p+m-1)!(n-p+m+m-1)!)^2} \\
 &\quad e^{i(2p+1)q} (z^*)^{n+p+m} z^{n-p+m-1} \\
 &\quad \frac{m!(n+p)!(n+p+m)!}{((n+p+m)!(n+p+m+m)!)^2} \frac{\partial}{\partial p}
 \end{aligned} \tag{15}$$

در شکل 1 تابع ویگنر تعداد- فاز متناظر با حالت‌های همدوس فوتون کاهیده برای نوسانگرهای ناهماهنگ در یک محیط غیرخطی کر برحسب x و y (مرسوم است تابع ویگنر تعداد- فاز به جای n و q برحسب دو پارامتر جدید $x = n \cos q$ و $y = n \sin q$) و به ازای m های مختلف رسم شده است. سطح ترسیم‌شده مربوط به تابع ویگنر به شکل منحنی‌های n ثابت (حلقه‌های هم‌مرکز با اختلاف واحد) است که به وسیله منحنی‌های q ثابت (خطوط شعاعی) قطع شده است. همان گونه که مشاهده می‌شود به ازای m های مختلف در بعضی از نواحی صفحه تابع ویگنر تعداد- فاز منفی شده است که دلیل بر غیر کلاسیکی بودن حالت‌های معرفی شده است.

تابع توزیع فاز پگ- بارنت

طبق رهیافت پگ- بارنت در فضای هیلبرت متناهی $s+1$ بعدی حالت فاز متعامد $|q_p\rangle$ به این شکل تعریف می‌شود [9]:

$$|q_p\rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{n=0}^s \hat{a} \exp(inq_p) |n\rangle \tag{16}$$

همچنین داریم:

$$P(q) = \frac{1}{2p} \left\{ 1 + 2N_m^2(|z|^2) \prod_{n=0}^{\infty} \prod_{l=0}^{n-1} \sqrt{\frac{m!(n-m)!(n-m+m)!}{(n!(n+m)!)^2}} \sqrt{\frac{m!(l-m)!(l-m+m)!}{(l!(l+m)!)^2}} \right\} z^n z^{*1} \cos[(n-1)q] \quad (21)$$

$$q_P = q_0 + \frac{2pP}{s+1} \quad P = 0, 1, \dots, s \quad (17)$$

که q_0 می‌تواند هر مقدار اختیاری می‌تواند داشته باشد. از این رو عملگر فاز هرمیتی را براساس حالت‌های فاز تعریف شده می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$f_q = \sum_{P=0}^s q_P |q_P\rangle \langle q_P| \quad (18)$$

تابع توزیع فاز پگ-بارنت، مربوط به حالت‌های همدوس فوتون کاهیده برای نوسانگرهای ناهماهنگ در یک محیط غیرخطی کر را می‌توان به این صورت تعریف کرد [10]:

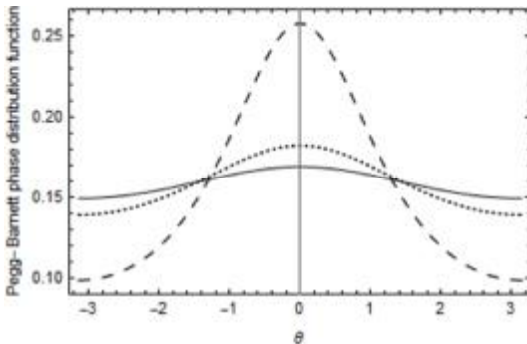
$$P(q) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s+1}{2p} \left| \langle q_k | z, -m \rangle \right|^2 \quad (19)$$

با استفاده از رابطه (16) و (19) خواهیم داشت:

$$P(q) = \frac{N_m^2(|z|^2)}{2p} \left| \prod_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{m!(n-m)!(n-m+m)!}{(n!(n+m)!)^2}} e^{-i(n-m)q_k} z^n \right|^2 \quad (20)$$

با جداگانه نوشتن جملات مربوط به $n=1$ و $n \geq 1$ به رابطه زیر خواهیم رسید:

در شکل 2 تابع توزیع فاز پگ-بارنت متناظر با حالت‌های همدوس فوتون کاهیده برای نوسانگرهای ناهماهنگ در یک محیط غیرخطی کر را برحسب q و به ازای m های مختلف رسم کرده‌ایم. همان طور که در شکل دیده می‌شود $P(q)$ فقط دارای یک تک‌قله در $q=0$ است و هرچه m افزایش یابد، این قله کوتاه‌تر و پهن‌تر است.



شکل 2. تابع توزیع فاز پگ-بارنت برحسب q با $m=1$ و $z=2$ متناظر با حالت‌های همدوس فوتون کاهیده نوسانگرهای ناهماهنگ در یک محیط غیرخطی کر به ازای $m=2$ (منحنی خط چین)، $m=5$ (منحنی نقطه چین) و $m=8$ (منحنی توپر).

چلانندگی تعداد- فاز

از آن جا که عملگرهای n و f_q هم‌یوغ یکدیگر هستند، رابطه عدم قطعیت زیر را برآورده می‌کنند:

$$\begin{aligned} \langle (Df_q)^2 \rangle &= \int_0^1 P(q) dq - \left(\int_0^1 P(q) dq \right)^2 \\ &= \frac{p^2}{3} + \frac{\alpha N_m^2 (|z|^2)}{\xi p} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{m!(n-m)!(n-m+m)!}{(n!(n+m)!)^2} \\ &= \frac{\sqrt{m!(l-m)!(l-m+m)!}}{(l!(l+m)!)^2} \\ &= \frac{4p(-1)^{n-1}}{(n-1)^2} z^n z^{*1} \frac{\ddot{0}}{\emptyset} \end{aligned} \quad (27)$$

در نهایت با جای‌گذاری روابط بالا در (24) و (25) می‌توان پارامترهای چلانگی را محاسبه کرد. برای مشاهده رفتار چلانگی در عملگرهای تعداد و فاز متناظر با حالت‌های همدوس فوتون کاهیده برای نوسانگرهای ناهماهنگ در یک محیط غیرخطی کر، S_n و S_f را بر حسب Z به‌ازای مقادیر مختلف m در شکل 3 رسم کرده‌ایم. از شکل درمی‌یابیم که پارامترهای چلانگی دارای رفتار معکوس هستند. به این معنی که با افزایش Z ، S_n افزایش می‌یابد اما S_f کاهش می‌یابد. به صورتی که صحت رابطه عدم قطعیت (22) محفوظ بماند.

همچنین برای مثال در $m=2$ به‌ازای $z \leq 4/751$ ، $S_n < 0$ و $S_f > 0$ است و نشان می‌دهد که چلانگی در عملگر تعداد رخ می‌دهد.

به ازای $4/751 \leq z \leq 7/423$ هیچ چلانگی در عملگرهای تعداد و فاز دیده نمی‌شود، اما برای Z های بیشتر از $7/423$ ، S_f منفی می‌شود و چلانگی در عملگر فاز دیده می‌شود.

$$\langle (Df_q)^2 \rangle \langle (Dn)^2 \rangle \geq \frac{1}{4} \left| \langle [n, f_q] \rangle \right|^2 \quad (22)$$

که در آن [11]:

$$[n, f_q] = i[1 - 2p P(q_0)] \quad (23)$$

در صورتی که $\langle (Dn)^2 \rangle < \frac{1}{2} \left| \langle [n, f_q] \rangle \right|$ یا $\langle (Df_q)^2 \rangle < \frac{1}{2} \left| \langle [n, f_q] \rangle \right|$ عملگر تعداد یا فاز اتفاق می‌افتد. برای بررسی چلانگی در عملگرهای فاز و تعداد پارامترهای چلانگی زیر معرفی می‌شوند:

$$S_n = \frac{2 \langle (Dn)^2 \rangle}{\left| \langle [n, f_q] \rangle \right|} - 1 \quad (24)$$

$$S_f = \frac{2 \langle (Df_q)^2 \rangle}{\left| \langle [n, f_q] \rangle \right|} - 1 \quad (25)$$

اگر $S_n < 0$ ($S_f < 0$) باشد حالت متناظر چلانده تعداد (فاز) است. عدم قطعیت در عملگرهای تعداد و فاز برای حالت‌های همدوس فوتون افزوده نوسانگر ناهماهنگ در یک محیط غیرخطی کر به‌ترتیب به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\langle (Dn)^2 \rangle = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 \quad (26)$$

$$A|a_n\rangle = a_n|a_n\rangle, \quad B|b_n\rangle = b_n|b_n\rangle \quad (28)$$

که در آن a_n و b_n مقادیر گسسته زیر را می‌گیرند:

$$a_n = a_0 + \frac{2pn}{(s+1)b}, \quad b_n = b_0 + nb \quad (29)$$

در این‌جا a_0 ، b_0 و b ثابت‌های حقیقی هستند. اگر احتمال اینکه اندازه‌گیری A نتیجه a_n بدهد را با $P_a(a_n)$ نشان دهیم (و عبارت مشابهی برای B) آنگاه آنتروپی شانون مربوط به عملگرهای A و B به صورت زیر تعریف می‌شوند [12]:

$$S_A = - \sum_{n=0}^s P_a(a_n) \ln P_a(a_n) \quad (30)$$

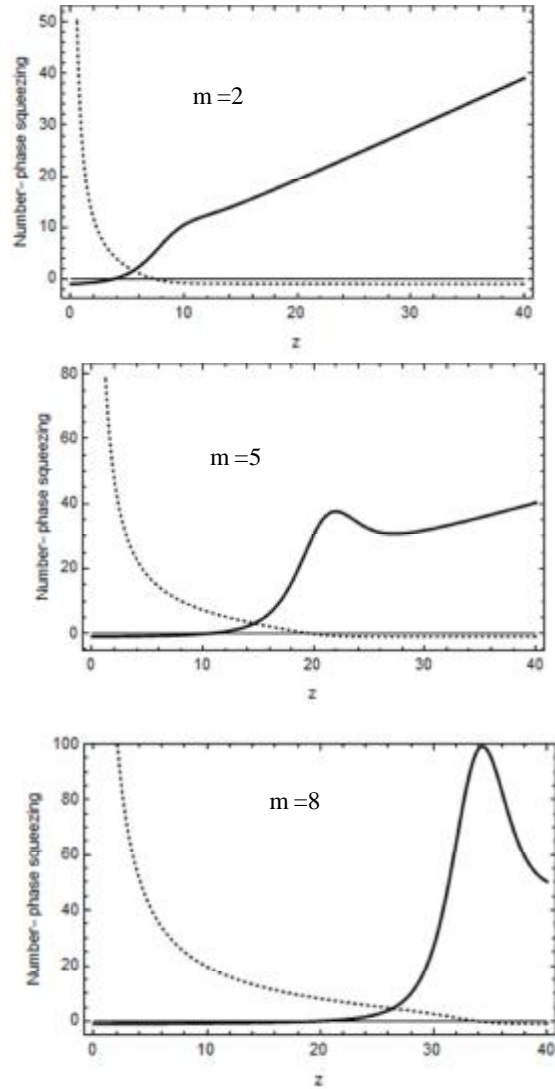
$$S_B = - \sum_{n=0}^s P_b(b_n) \ln P_b(b_n) \quad (31)$$

این دو آنتروپی مستقل از هم نیستند و با رابطه عدم قطعیت آنتروپی محدود می‌شوند که کراس¹ [13] پیشنهاد داد سپس ماسن² و یوفینک³ اثبات کردند [14]. براساس نتایج آنها برای عملگرهای A و B در فضای حالت $(s+1)$ بعدی به نامساوی زیر دست می‌یابیم:

$$S_A + S_B \geq \ln(s+1) \quad (32)$$

رابطه عدم قطعیت (32) بستگی به بعد فضای حالت دارد و برای یک سامانه بی‌نهایت بعدی این کران پایین واگرا می‌شود. برای اینکه در حد بی‌نهایت معنادار شود، واکارو⁴ و همکارانش تعریف آنتروپی را تغییر دادند و یک کران پایین مستقل از بعد فضا به دست آوردند [15]. آنها با استفاده از دو مقدار ثابت

$$d_a = 2p / [(s+1)b], \quad d_b = b \quad (33)$$



شکل 3. پارامترهای چلانگی S_n (منحنی توپر) و S_f (منحنی نقطه‌چین)، برحسب z به‌ازای m های مختلف با $m=1$ برای حالت‌های همدوس فوتون کاهیده نوسانگرهای ناهماهنگ در یک محیط غیرخطی کر

رابطه عدم قطعیت آنتروپی تعداد- فاز

فرض کنید A و B یک جفت عملگر هم‌یوغ در فضای $(s+1)$ بعدی تعریف شوند. هر کدام از آنها دارای مجموعه کاملی از ویژه توابع $|a_n\rangle$ و $|b_n\rangle$ هستند و معادله ویژه مقداری زیر را برآورده می‌کنند:

1. Kraus
2. Maassen
3. Uffink
4. Vaccaro

فاز و تعداد با انتخاب $b=1$ ، $a_0=q_0$ و $b_0=0$ در (30) جایگزین می‌کنیم. در این صورت رابطه عدم قطعیت آنتروپی برای عملگرهای فاز و تعداد به صورت زیر درخواهد آمد:

$$R_f + R_n \geq \ln(2p) \quad (40)$$

در این جا روابط عدم قطعیت تعداد- فاز برای حالت‌های همدوس فوتون افزوده نوسانگر ناهماهنگ را در نظر می‌گیریم. در حدی که S به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، مجموع در رابطه (36) به انتگرال ریمان تبدیل می‌شود [16]:

$$R_f = - \int_{q_0}^{q_0+2p} P(q) \ln P(q) dq \quad (41)$$

از طرف دیگر آنتروپی عملگر تعداد برای حالت‌های همدوس فوتون افزوده نوسانگر ناهماهنگ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R_n = - \sum_{n=0}^{\infty} |\langle n|z, -m\rangle|^2 \ln \left(|\langle n|z, -m\rangle|^2 \right) \quad (42)$$

در شکل 4 R_n ، R_f و مجموع آنها برای حالت‌های همدوس فوتون کاهیده معرفی شده برحسب $z \in \mathbb{R}$ و به‌ازای m های مختلف رسم شده است.

همان طور که در شکل مشاهده می‌گردد با افزایش z ، R_n افزایش و R_f کاهش می‌یابند به نحوی که همواره مطابق رابطه (40) مجموع آنتروپی‌ها دارای یک کران پایین $\ln(2p)$ است.

به‌ترتیب فاصله بین ویژه مقادیر عملگرهای A و B هستند، شکل جدیدی از چگالی‌های احتمال را به صورت زیر معرفی کردند:

$$P_A(n) = P_a(a_n) / d_a, \quad P_B(n) = P_b(b_n) / d_b \quad (34)$$

با توجه به کامل بودن و تعامد ویژه توابع A و B خواهیم داشت:

$$\sum_{n=0}^s P_A(n) d_a = 1 = \sum_{n=0}^s P_B(n) d_b \quad (35)$$

کمیت‌های جدید R_B و R_A را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$R_A^0 - \sum_{n=0}^s d_a P_A(n) \ln P_A(n) = S_A + \ln d_a \quad (36)$$

$$R_B^0 - \sum_{n=0}^s d_b P_B(n) \ln P_B(n) = S_B + \ln d_b \quad (37)$$

با ترکیب روابط (32)، (36) و (37) خواهیم داشت:

$$S_A + S_B + \ln d_a + \ln d_b \geq \ln(s+1) + \ln d_a + \ln d_b \quad (38)$$

و با استفاده از رابطه (33) داریم:

$$R_A + R_B \geq \ln(2p) \quad (39)$$

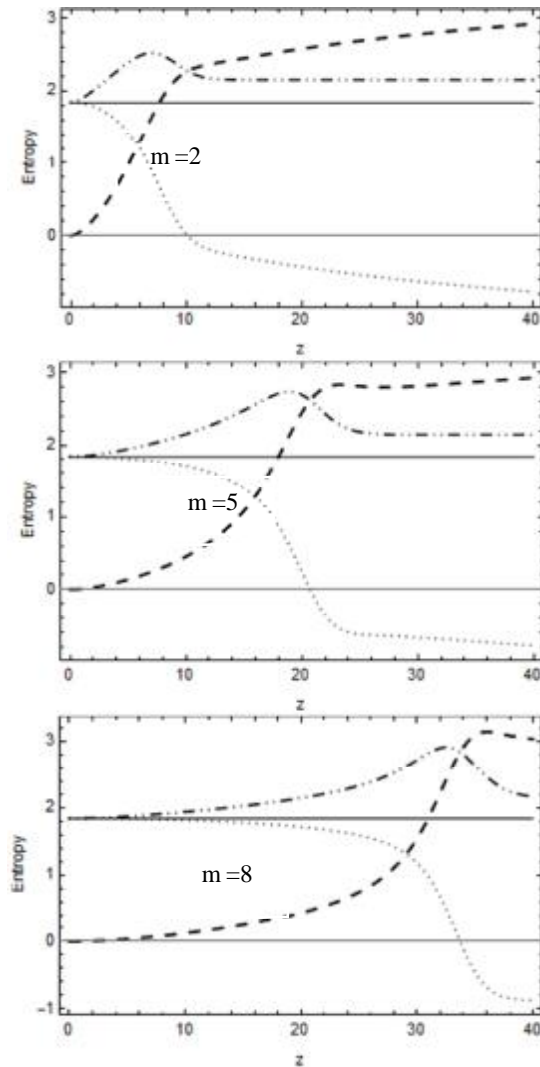
که مستقل از بعد فضای حالت است. حالت تساوی در این رابطه برای ویژه توابع A و B اتفاق می‌افتد. حال عملگرهای مزدوج عمومی A و B را با عملگرهای

در نهایت با استفاده از (11) به رابطه زیر می‌رسیم:

$$R_n = -N_m^2(|z|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m!n!(n+m)!|z|^{2(n+m)}}{((n+m)!(n+m+m)!)^2} \quad (43)$$

نتیجه گیری

در این مقاله برای اولین بار حالت‌های همدوس فوتون کاهیده برای نوسانگرهای ناهماهنگ در یک محیط غیرخطی کر تعریف شده است سپس به بررسی ویژگی‌های فازی این حالت‌ها پرداخته شده است. تابع ویگنر در بعضی نقاط منفی شده است، که نشان دهنده رفتار غیرکلاسیکی حالت‌های معرفی شده است. همچنین برای تابع توزیع فاز پگ-بارنت هرچه مقدار m کمتر باشد، قله نمودار بلندتر و تیزتر است؛ بنابراین نشان می‌دهد که حالت‌های معرفی شده به ازای m های کوچک‌تر نسبت به q جای‌گزیده‌تر هستند. با بررسی چلانگی تعداد- فاز نشان داده شد که این حالت‌ها دارای چلانگی هستند که نشان‌دهنده ماهیت غیرکلاسیکی این حالت‌ها است. علاوه بر این با بررسی رابطه عدم قطعیت آنتروپی تعداد- فاز نشان داده شد که مجموع آنتروپی‌ها دارای کران پایین $\ln(2p)$ است.



شکل 4. رابطه عدم قطعیت آنتروپی تعداد- فاز برحسب z به‌ازای m های مختلف با $m=1$ برای حالت‌های همدوس فوتون کاهیده نوسانگرهای ناهماهنگ در یک محیط غیرخطی کر $\{R_n$ (منحنی خط‌چین)، R_q (منحنی نقطه چین)، $R_n + R_q$ (منحنی نقطه - خط‌چین)، $\ln(2p)$ (منحنی توپر)}.

References

- [1] E. Schrödinger, Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik, Naturwiss 23 (1935) 807-812.
 [2] S. Iqbal and F. Saif, Quantum recurrences in driven power-law potentials, Physics Letters A 356 (2006) 231-236.

- [3] P. Roy, Quantum statistical properties of Gazeau-Klauder coherent state of the anharmonic oscillator, Opt. commun. 221 (2003) 145-152.
 [4] R. Robinett, Wave packet revivals and quasirevivals in one-dimensional power law potentials, J. Math. Phys. 41 (2000)

- 1801-1813,.
- [5] M. Al-Rajhi, Photon added coherent states for nonharmonic oscillators in a nonlinear Kerr medium, *Mod. Phys. Lett. B* 29 (2015) 1550035.
- [6] E. Wigner, On the quantum correction for thermodynamic equilibrium, *Phys. Rev.* 40 (1932) 749.
- [7] J. Vaccaro, Number-phase Wigner function on Fock space, *Phys. Rev. A* 52 (1995) 3474.
- [8] J. A. Vaccaro, New Wigner function for number and phase, *Opt. commun.* 113 (1995) 421-426.
- [9] D. Pegg and S. Barnett, Phase properties of the quantized single-mode electromagnetic field, *Phys. Rev. A*, 39 (1989) 1665.
- [10] B. Roy and P. Roy, Phase distribution of nonlinear coherent states, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, 1 (1999) 341.
- [11] D. T. Pegg and S. M. Barnett, Unitary phase operator in quantum mechanics, *Europhys. Lett.* 6 (1998) 483.
- [12] C. E. Shannon, A mathematical theory of communication, *Bell Syst. Tech. J.* 27 (1948) 379.
- [13] K. Kraus, Complementary observables and uncertainty relations, *Phys. Rev. D* 35 (1987).3070.
- [14] H. Maassen and J. B. M. Uffink, Generalized entropic uncertainty relations, *Phys. Rev. Lett* 60 (1988).1103.
- [15] A. R. González, J. A. Vaccaro and S. M. Barnett, Entropic uncertainty relations for canonically conjugate operators, *Phys. Lett. A* 205 (1995) 247-254.
- [16] H. Jeffreys and B. S. Jeffreys, *Methods of Mathematical Physics*, Cambridge: Cambridge University Press (1988).