Quarterly Journal of
Optoelectronic
Vol. 2, No. 1, (Serial 5), Summer 2017 (P 43-48)

فصلنامه
اپتوالکترونیک
سال دوم، شماره اول (پیاپی پنجم)، تابستان 1396 (ص 43 - 48)

دینامیک کدگذاری فوق چگال در مدل جینز کامینگز

فروزان میرمسعودی[1]**، صدیف احدپور**[2*]
1. دانشجوی دکتری، فیزیک، دانشگاه محقق اردبیلی
2. دانشیار، فیزیک، دانشگاه محقق اردبیلی

تاریخ دریافت: 1396/06/27 **تاریخ پذیرش**: 1396/08/11

Dynamic Optimal Dense Coding in Jaynes-Cummings Model

F. Mirmasoudi[1], S. Ahadpour[*2]
1. Ph.D Student, Department of Physics, University of Mohaghegh Ardabili, Ardabil, Iran
2. Associate Professor, Department of Physics, University of Mohaghegh Ardabili, Ardabil, Iran

Received: 2017-09-18 **Accepted:** 2017-11-02

Abstract
The aim of this paper is the investigation of the optimal dense coding at the Jaynes -Cummings model as a quantum channel. First, with the introduction of the model we discuss a brief description of the dense coding. Then, by calculating the capacity dense coding, we investigate the effect of cavity Fock state in optimal dense coding. We show how the Jaynes-Cummings model, which is the result of the interaction of the field and the atom, can be located as an effective quantum channel in optimal dense coding.

Keywords
The Jaynes Cummings Model, Optimal Dense Coding, Cavity Fock States, Quantum Channel.

چکیده
هدف این مقاله مطالعه دینامیک کدگذاری فوق چگال در مدل جینز کامینگنز به عنوان یک کانال کوانتومی است. ابتدا با معرفی مدل مورد نظر توصیف مختصری درباره کدگذاری چگال ارائه می‌کنیم. سپس با محاسبه ظرفیت کدگذاری چگال، اثر تعداد حالت‌های فوک کاواک بر مقدار بهینه کدگذاری چگال را بررسی کرده و نشان می‌دهیم چگونه مدل جیمزکامینگز که حاصل برهمکنش میدان و اتم است می‌تواند به عنوان یک کانال کوانتومی مؤثر در کدگذاری فوق چگال واقع شود.

واژگان کلیدی
مدل جینز کامینگز، کدگذاری فوق چگال، حالت‌های فوک کاواک، کانال کوانتومی.

*Corresponding Author: ahadpour@uma.ac.ir

*** نویسندهٔ مسئول**: صدیف احدپور

مقدمه

با توجه به کاربردهای زیاد درهمتنیدگی در مواردی نظیر رمزنگاری کوانتومی [1]، کدگذاری چگال [2]، فرابرد کوانتومی [3] و به طور کلی پردازش، تولید و حفظ درهم‌تنیدگی یکی از مهم‌ترین مباحث مکانیک کوانتومی محسوب می‌شود [4]. یکی از روش‌های ایجاد حالت‌های درهم‌تنیده، فرآیند برهمکنش اتم- میدان در داخل کاواک است که با مدل کاملا کوانتومی جینز- کامینگز قابل توصیف و تولید است. در سال‌های اخیر، این مدل در ارتباطات کوانتومی از جمله فرابرد کوانتومی بسیار مورد توجه قرار گرفته است [5-8] در مرجع [8] فرایند فرابرد کوانتومی به کمک ناهم‌خوانی کوانتومی و ابرناهم‌خوانی کوانتومی در مدل یاد شده بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهد این مدل می‌تواند نقش مؤثری در فرایند فرابرد کوانتومی داشته باشد. بنابراین با توجه به اهمیت مدل در فرایندهای کوانتومی در این مقاله ما قصد داریم به مطالعه یکی دیگر از فرایندهای کوانتومی، کدگذاری چگال به کمک مدل جینز کامینگز بپردازیم.

یکی دیگر از فرایندهای کوانتومی، کدگذاری چگال است. در انتقال اطلاعات کوانتومی، حالت‌های درهمتنیده نقش عمده‌ایی دارند. درهمتنیدگی دو ذره، حتی در فواصل دور، به علت وجود همبستگی‌های کوانتومی بین دو ذره است. در فرایند کدگذاری چگال فرستنده، یک پیام دو بیتی کلاسیکی را تنها توسط یک کیوبیت به گیرنده ارسال می‌کند. فرض کنید آلیس می‌خواهد دو بیت اطلاعات کلاسیک را برای باب بفرستد؛ اما بین آلیس و باب فقط یک کانال برای انتقال اطلاعات کوانتومی (ارسال کیوبیت) وجود دارد. کدگذاری فوق چگال نشان می‌دهد که ارسال دو بیت از آلیس به باب با فرستادن فقط یک کیوبیت امکان‌پذیر است. یعنی با فرستادن یک کیوبیت از سمت آلیس به باب می‌توان دو بیت اطلاعات کلاسیک را انتقال داد ولی با این شرط که بین آلیس و باب درهم‌تنیدگی به اشتراک گذاشته شده باشد. در سال‌های اخیر کدگذاری چگال، به صورت تجربی و نظری مورد توجه قرار گرفته است [9-11].

در این مقاله، به بررسی کدگذاری فوق چگال در مدل جیمنز - کامینگز می‌پردازیم. بحث ما ابتدا با توصیف مدل مورد نظر و تولید درهم‌تنیدگی شروع می‌شود. بنابراین بررسی این مدل در ارتباطات کوانتومی بسیار ضروری است. با در نظر گرفتن این مدل به عنوان یک کانال کوانتومی در کدگذاری فوق چگال، احتمال موفقیت در ارسال اطلاعات را در این کانال بررسی می‌کنیم. برای این منظور، ظرفیت کانال که نرخ انتقال اطلاعات کوانتومی را اندازه‌گیری می‌کند، به دست می‌آوریم. با مطالعه ظرفیت کدگذاری چگال بر حسب مقیاس زمانی، نتایج نشان می‌دهد با انتخاب مقادیر مناسب برای کانال کوانتومی، امکان دسترسی به بهینه کدگذاری کوانتومی از طریق این کانال کوانتومی مؤثر است. بدین ترتیب این مسئله به اهمیت مدل جیمنز- کامینگز در ارتباطات کوانتومی می‌افزاید.

توصیف مدل

هامیلتونی مدل جینز- کامینگز غیرخطی در تصویر برهمکنش به صورت زیر است [12]:

$$H = \omega a^{\dagger}a + \frac{1}{2}\omega_0 \sigma_z + \lambda \left(a^{\dagger} |g\rangle\langle e| + a |e\rangle\langle g|\right) \qquad (1)$$

که ω فرکانس انتقال اتمی، ω_0 فرکانس میدان λ ضریب کوپلاژ اتم – میدان است. $(a^{\dagger})a$ عملگرهای تولیدکننده (نابودکننده) و σ_z ماتریس‌های پائولی و $|e\rangle$ و $|g\rangle$ به ترتیب حالت‌های پایه و برانگیخته هستند. با فرض اینکه حالت اولیه پیوسته اتم – میدان به صورت زیر است:

$$|\psi(0)\rangle_{af} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n |n, e\rangle \qquad (2)$$

ما فرض می‌کنیم در حالت اولیه اتم در یک حالت برانگیخته $|e\rangle$ قرار دارد؛ به طوری که، حالت همدوس

برای متوسط فوتون‌ها $\bar{n}$ برابر با $P_n = \exp(-\bar{n}/2)\sqrt{\bar{n}^n/n!}$ است. حالت تحول یافته تحت این مدل به صورت زیر خواهد بود:

$$|\psi(t)\rangle_{af} = U(t)|\psi(0)\rangle_{af} \qquad (3)$$

که U عملگر تحول زمانی است. در پایه‌های $|e\rangle$ و $|g\rangle$ به صورت زیر است:

$$U(t) = \begin{pmatrix} \cos(t\sqrt{a^\dagger a+1}) & \frac{-i\,a}{\sqrt{a^\dagger a}}\sin(t\sqrt{a^\dagger a+1}) \\ \frac{i\,a^\dagger}{\sqrt{a^\dagger a}}\sin(t\sqrt{a^\dagger a+1}) & \sin(t\sqrt{a^\dagger a}) \end{pmatrix} \qquad (4)$$

که $\tau = \lambda t$ برهمکنش بدون بعد زمانی است. به کمک عملگر تحول زمانی، می‌توان در هر لحظه دلخواه دیگر حالت سیستم را به دست آورد:

$$|\psi(t)\rangle_{af} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n[\cos(t\sqrt{n+1})|n,e\rangle - i\,\sin(t\sqrt{n+1})|n+1,g\rangle] \qquad (5)$$

ماتریس چگالی حالت پیوسته میدان – اتم $\infty \times 2$ بعدی است، حالت مورد علاقه حالت است. برای این منظور تمام حالت میدان – اتم را روی یک زیرفضای 2×2 بعدی تصویر می‌کنیم [2]. در یک زیر فضای دو بعدی، ماتریس چگالی تحول یافته $\rho_{af}(t) = |\psi(t)\rangle_{af}\langle\psi(t)|$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\rho_{af}(t) &= k_1|n,g\rangle\langle n,g| + k_2|n,e\rangle\langle n,e| \\ &+ k_3[|n,e\rangle\langle n+1,g| - |n+1,g\rangle\langle n,g|] \\ &+ k_4|n+1,g\rangle\langle n+1,g| + k_5|n+1,g\rangle\langle n+1,g|\end{aligned} \qquad (6)$$

که عناصر ماتریسی به صورت زیر است:

$$k_1 = \frac{P_{n-1}^2}{N}\sin^2(t\sqrt{n}) \qquad \text{(7-الف)}$$

$$k_2 = \frac{P_n^2}{N}\sin^2(t\sqrt{n+1}) \qquad \text{(7-ب)}$$

$$k_3 = i\,\frac{P_n^2}{N}\sin^2(t\sqrt{n+1})\cos^2(t\sqrt{n+1}) \qquad \text{(7-ج)}$$

$$k_4 = \frac{P_n^2}{N}\sin^2(t\sqrt{n+1}) \qquad \text{(7-د)}$$

$$k_5 = \frac{P_{n+1}^2}{N}\cos^2(t\sqrt{n+1}) \qquad \text{(7-ه)}$$

که در آن داریم:

$$N = P_{n+1}^2\sin^2(t\sqrt{n}) + P_n^2 + P_{n+1}^2\cos^2(t\sqrt{n}). \qquad (8)$$

در [12] به کمک کانکرونس به عنوان یک معیار درهم‌تنیدگی و در [8] به کمک ناهم‌خوانی کوانتومی و ابرناهم‌خوانی کوانتومی به عنوان معیاری برای همبستگی کوانتومی نشان داده شده که این سیستم کوانتومی درهم‌تنیده و دارای همبستگی کوانتومی است. نتایج آنها به وضوح نشان می‌دهد که مدل جیمز کامینگز به تولید حالت‌های درهم‌تنیده از یک حالت اولیه جداپذیر و غیردرهم‌تنیده منجر می‌شود. حال با داشتن این ماتریس چگالی تحول یافته در بخش بعدی نشان می‌دهیم این سیستم کوانتومی درهم‌تنیده می‌تواند در کدگذاری فوق چگال به عنوان یک کانال کوانتومی مطلوب واقع شود.

کدگذاری فوق چگال

به منظور انجام کدگذاری فوق چگال در مدل توصیف شده، ابتدا باید به ساخت مجموعه دو کیوبیتی متعامد بپردازیم [13]:

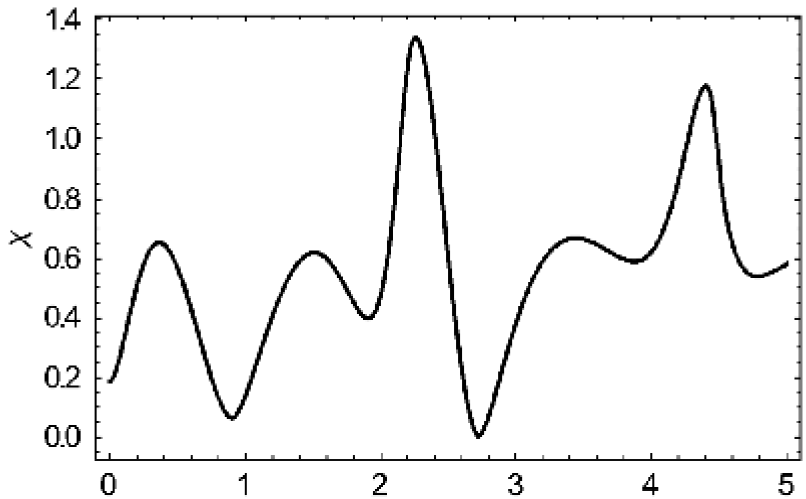
$U00|j\rangle = |j\rangle$

$U01|j\rangle = |j + 1(\mathrm{mod}\,2)\rangle$

$U10|j\rangle = e^{\sqrt{-1}(2\pi/2)j}|j\rangle$

$$U11|j\rangle = e^{\sqrt{-1}(2\pi/2)j}\,|j + 1(\mathrm{mod}2)\rangle$$

و بهینه کدگذاری کوانتومی به ازای $\chi_{max} = 2$ رخ می‌دهد. حال با استفاده از ماتریس چگالی تحول یافته به



شکل 1. نمودار تغییرات ظرفیت کدگذاری چگال برحسب مقیاس زمانی t به ازای تعداد متوسط فوتون‌ها $\bar{n} = 2$ برای حالت فوک $n = 2$

که $|j\rangle$ پایه محاسباتی تک کیوبیتی ($|j\rangle = |0\rangle, |1\rangle$) است. میانگین آنسامبلی از حالت‌های منفرد تولید شده توسط تبدیلات واحد از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\bar{\rho}^* = \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{3}(U_i \otimes I_2)\rho(U_i^{\dagger} \otimes I_2) \qquad (9)$$

که اندیس 0 بیانگر عنصر 00، 1 برای 01، 2 برای 10، 3 برای 11 و ρ ماتریس چگالی کاهش یافته کانال کوانتومی است. اگر فرستنده مجموعه‌ایی از تبدیلات یکانی متعامد را انجام دهد، بیشینه ظرفیت کدگذاری به صورت زیر به دست می‌آید:

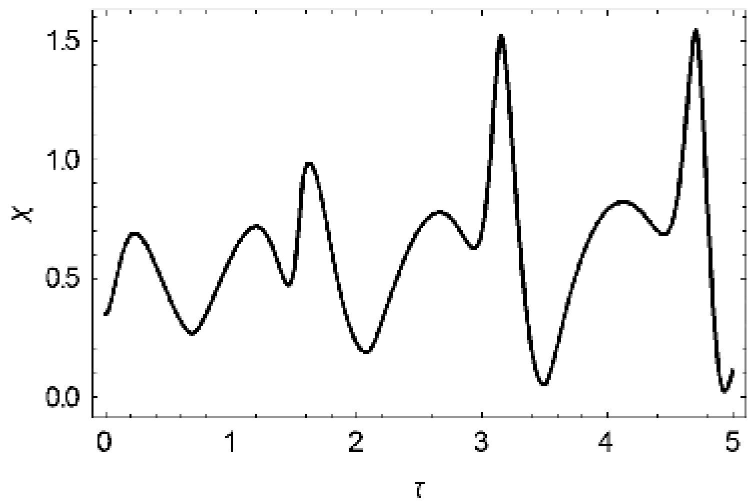
$$\chi = S(\rho^*) - S(\rho) \qquad (10)$$

که $S(\rho^*)$ آنتروپی فون نویمن حالت متوسط انسامبلی از حالت‌های منفرد ρ^* است و $S(\rho)$ آنتروپی فون نویمن کانال کوانتومی است. به ازای $\chi > 1$ کدگذاری معتبر بوده

عنوان یک کانال کوانتومی می‌توان ظرفیت کدگذاری چگال را به سادگی به دست آورد:

$$\begin{aligned}\chi = -\frac{1}{2\mathrm{Ln}2}\{&-2(k_2+k_4)\log\frac{(k_2+k_4)}{2}\\ &+2(k_1+k_3)\log\frac{(k_1+k_3)}{2}+2k_1\log k_1\\ &+2k_2\log k_2+2k_4\log k_4+2k_5\log k_5\}\end{aligned} \qquad (11)$$

دینامیک ظرفیت کدگذاری چگال برحسب مقیاس زمانی برای حالت‌های فوک کاواک مختلف n به ازای مقدار متوسط فوتون‌ها $\bar{n} = 2$ در شکل‌های (1) و (2) در بازه زمانی [5 و 0] رسم شده است. در هر دو شکل، رفتار تناوبی ظرفیت کدگذاری چگال دیده می‌شود و اینکه مقدار بیشینه آن وابسته به تعداد حالت‌های فوک کاواک است. همچنین در برخی فاصله‌های زمانی امکان دسترسی به بهینه مقدار ظرفیت کدگذاری چگال امکان‌پذیر است؛ به طوری که با افزایش تعداد حالت‌های فوک، مقدار بیشینه آن را می‌توان افزایش داد. بنابراین مقدار بهینه ظرفیت کدگذاری چگال به کمک تعداد حالت‌های فوک در یک بازه



شکل 2. نمودار تغییرات ظرفیت کدگذاری چگال برحسب مقیاس زمانی t به ازای تعداد متوسط فوتون‌ها $\bar{n} = 2$ برای حالت فوک $n = 4$

زمانی معین قابل کنترل است. بنابراین مدل برهمکنشی بین اتم و میدان می‌تواند نقش مهمی در ارسال پیام از گیرنده به فرستنده از طریف کدگذاری چگال داشته باشد.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، به بررسی کدگذاری چگال در یک سیستم دو کیوبیتی، مدل جینز- کامینگز که بیانگر برهمکنش اتم – میدان است، پرداختیم. به طوری که حالت اولیه جداپذیر اتم و میدان به ترتیب در حالت برانگیختگی و حالت‌های فوک کاواک بود. تحول حالت اولیه تحت این مدل به تولید حالت‌های درهم‌تنیده منجر می‌شود. با توجه به اهمیت درهم‌تنیدگی در ارتباطات کوانتومی، می‌توان از این سیستم به عنوان کانال کوانتومی در کدگذاری فوق چگال، فرابرد کوانتومی و محاسبات کوانتومی استفاده کرد. بر همین اساس، کدگذاری کوانتومی از طریق این مدل و محاسبه ظرفیت کدگذاری چگال برحسب مقیاس زمانی به عنوان معیاری برای اندازه‌گیری میزان پیام ارسال شده انجام شد. نتایج نشان می‌دهد تعداد حالت‌های فوک کاواک به طور مستقیم بر میزان ظرفیت کدگذاری چگال مؤثر است. با افزایش تعداد حالت‌های فوک مقدار آن قابل افزایش است؛ بنابراین این مدل می‌تواند در اطلاعات کوانتومی نقش مهمی داشته باشد.

References

[1] Bennett CH, Wiesner SJ. Communication via one-and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states. Physical review letters. 1992; 69(20): 2881.

[2] Ekert A. Quantum cryptography based on Bell's theorem. Physical review letters. 1991; 67(6):661-3.

[3] Bennett CH, Brassard G, Crépeau C, Jozsa R, Peres A, Wootters WK. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. Physical review letters. 1993; 70(13):1895.

[4] Barnett S. Quantum information: Oxford University Press; 2009.

[5] Zhang J-S, Xu J-B. Control of the entanglement of a two-level atom in a dissipative cavity via a classical field. Optics Communications. 2009; 282(13): 2543-6.

[6] Feng L-J, Zhang Y-J, Xia Y-J. Dynamics and improvement of quantum correlations in the triple Jaynes–Cummings model. Optics Communications. 2016; 366:328-34.

[7] Rawlinson W, Vyas R. Enhancement of discord and entanglement with detuning for two coupled quantum dots in a driven cavity. Journal of Modern Optics. 2015; 62(13):1061-7.

[8] Mirmasoudi F., Ahadpour S. Dynamics super quantum discord and quantum discord teleportation in the Jaynes–Cummings model. Journal of Modern Optics. 2017: 1-7.

[9] Barenco A, Ekert AK. Dense coding based on quantum entanglement. Journal of Modern Optics. 1995; 42(6):1253-9.

[10] Braunstein S. SL Braunstein and HJ Kimble, Phys. Rev. A 61, 042302 (2000). Phys Rev A. 2000; 61: 042302.

[11] Bose S, Plenio MB, Vedral V. Mixed state dense coding and its relation to entanglement measures. Journal of Modern Optics. 2000; 47(2-3):291-310.

[12] Metwally N, Abdelaty M, Obada A-S. Quantum teleportation via entangled states generated by the Jaynes–Cummings model. Chaos, Solitons & Fractals. 2004; 22(3): 529-35.

[13] Hiroshima T. Optimal dense coding with mixed state entanglement. Journal of Physics A: Mathematical and General. 2001; 34(35): 6907.