

## حل معادله انتقال شدت و فاز بدون داشتن شرایط مرزی صفر

جواد امیری\*

استادیار، فیزیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد مراغه

تاریخ پذیرش: 1395/06/06

تاریخ دریافت: 1395/04/27

## Solving the Transport-of-Intensity Equation Without the Zero Boundary Condition

J. Amiri\*

Assistant Professor, Physic, Islamic Azad University Maragheh Branch

Received: 2016/07/17

Accepted: 2016/08/27

### Abstract

In this paper, the wave front of a beam is obtained by solving the transport of Intensity equation, which is non- interference method. In this way, by measuring the beam intensity in a certain point and solving transport of intensity equation, phase of beam is extracted.

Zero boundary conditions generally used to solve the equation which in some applications, this condition does not exist and solving equations associated with high error. In this article, imposing mandatory zero boundary conditions is proposed. Simulation results show that by applying it, answers tend to the desired values. the results are simulated by Matlab.

### Keywords

TIE, Wavefront, Boundary Condition.

### چکیده

در این مقاله فاز جبهه موج برای یک باریکه با استفاده از روش حل معادله انتقال شدت و فاز (TIE) که یک روش غیر تداخلی است، به دست می‌آید. در این روش با اندازه‌گیری شدت باریکه در چند نقطه مشخص و حل معادله انتقال فاز و شدت، فاز باریکه استخراج می‌شود. عموماً شرایط مرزی که برای حل معادله (TIE) استفاده می‌شود، شرایط مرزی صفر است که در برخی کاربردها این شرط برقرار نیست؛ بنابراین حل معادله با خطای زیاد همراه است. در این کار اعمال شرایط مرزی صفر به صورت اجباری پیشنهاد شده است که نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهند با اعمال آن جوابها به سمت مقادیر مورد نظر میل می‌کنند. شبیه‌سازی به کمک نرم‌افزار متلب انجام شده است.

### واژگان کلیدی

معادله انتقال شدت، شرایط مرزی، جبهه موج.

\* نویسنده مسئول: جواد امیری

ایمیل نویسنده مسئول:

\*Corresponding Author: [j\\_amiri@iau-maragheh.ac.ir](mailto:j_amiri@iau-maragheh.ac.ir)

## مقدمه

با توجه به اهمیت فاز یک باریکه، به علت اطلاعاتی که می‌تواند با خود به همراه داشته باشد، روش‌های مختلفی برای محاسبه فاز باریکه مطرح شده‌اند [1]. روش‌های محاسبه فاز به صورت کلی به دو دسته تقسیم می‌شوند: الف) روش‌های تداخل‌سنجی (ب) روش‌های غیر تداخل‌سنجی. هر کدام از روش‌ها دارای مزایا و معایب خاص خود هستند. یکی از روش‌های غیر تداخل‌سنجی برای استخراج فاز موج تداخلی حل معادله انتقال شدت و فاز (TIE) است که تیگو [2] و استریبل [3] آن را معرفی کرده‌اند. در این روش توزیع شدت باریکه در دو مکان عمود بر انتشار با فاصله مشخص ثبت می‌شود و با استفاده از آن معادله انتقال شدت و فاز حل شده و فاز باریکه به دست می‌آید. معادله (TIE) یک معادله دیفرانسیلی درجه دو است که در اغلب شرایط با کمک یک تابع کمکی به معادله پواسون تبدیل شده و برای حل آن روش‌های مختلفی معرفی شده است [4-8]. در روش‌های ارائه شده فرض بر این است که باریکه در داخل یک محدوده، دارای شدت غیر صفر است و در کناره‌ها مقدار آن به صفر میل می‌کند. در بسیاری از کاربردها این فرض درست است ولی مواردی وجود دارد که در آنها این فرض برقرار نیست، مثلاً وقتی تصویر یک جسم فازی در زیر میکروسکوپ بررسی می‌شود شدت در کناره‌ها می‌تواند صفر نباشد و به صورت غیریکنواخت تغییر کند.

## حل معادله TIE

برای به دست آوردن فاز یک باریکه با این روش نیاز است که حداقل در دو مکان  $(z_1, z_2)$  در راستای انتشار باریکه توزیع شدت باریکه ثبت شود، معمولاً ثبت شدت در سه مکان جواب‌های بهتری می‌دهد. معادله TIE در رابطه زیر نمایش داده شده است.

$$\frac{\partial^2 \tilde{N}_\lambda}{\partial z^2} = -k \frac{\partial \tilde{N}_\lambda}{\partial z} \quad (1)$$

در این معادله،  $\tilde{N}_\lambda = \frac{\partial \tilde{I}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{I}}{\partial y}$  است و جمله  $-k \frac{\partial \tilde{N}_\lambda}{\partial z}$  استفاده از دو توزیع شدت ثبت شده ایجاد می‌شود. با توجه به یکنواخت فرض شدن شدت باریکه (این فرض همواره درست نیست) از جمله کمکی  $(\tilde{N}_\lambda y = I \tilde{N}_\lambda q)$  می‌توان استفاده کرد و شکل معادله به صورت زیر تغییر می‌کند.

$$\tilde{N}_\lambda y = -k \frac{\partial \tilde{I}}{\partial z} \quad (2)$$

در اکثر روش‌های حل از تعریف مشتق در فضای فوریه استفاده می‌شود که برای مشتق مرتبه  $n$  به صورت زیر است:

$$\text{fft}\left(\frac{\partial^n}{\partial x^n} f(x, y)\right) = i^n q_x^n \text{fft}(f(x, y)) \quad (3)$$

در این رابطه  $\text{fft}$  تبدیل فوریه و  $q_x$  مولفه  $x$  فرکانس فضایی است. با کمک این رابطه حل معادله انتقال شدت و فاز به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$q = -k \tilde{N}_\lambda^{-2} \left\{ \tilde{N}_\lambda \left[ \frac{\partial \tilde{I}}{\partial z} \right] \right\} \quad (4)$$

در این رابطه  $\tilde{N}_\lambda^{-2}$  نشان‌دهنده لاپلاسیان معکوس است که در زیر رابطه آن نوشته شده است.

$$\tilde{N}_\lambda^{-2} u(x, y) = - \text{fft} \left\{ \frac{\text{fft}^{-1}\{u(x, y)\}}{|q_\lambda|^2} \right\} \quad (5)$$

در این رابطه  $|q_\lambda|^2 = (q_x^2 + q_y^2)$  همان‌طور که از رابطه 4 مشخص است چون شدت باریکه در مخرج کسر ظاهر شده است نباید صفر باشد یعنی در نقاطی که شدت باریکه صفر شود فاز موج به دست نخواهد آمد. برای انتخاب فاصله بهینه بین این دو توزیع شدت  $(dz)$  قبلاً کارهایی انجام شده است [9] و در این مقاله وارد جزئیات آن نخواهیم شد.

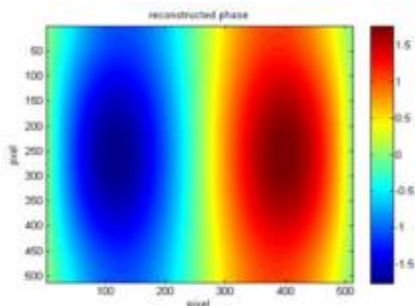
در صورتی که توزیع شدت به صورت یکنواخت نباشد جمله کمکی  $(\tilde{N}_\lambda y = I \tilde{N}_\lambda q)$  دیگر قابل استفاده نخواهد بود و معادله TIE به شکل رابطه پواسون (2) نخواهد شد. برای چنین مواردی حل معادله TIE کمی پیچیده‌تر خواهد شد که در مرجع [10] روش حل آن توضیح داده شده است.

## شبیه‌سازی

شکل 1 نشان‌دهنده چیدمان فرضی است که نتایج آن در این مقاله شبیه‌سازی شده است. در این شبیه‌سازی

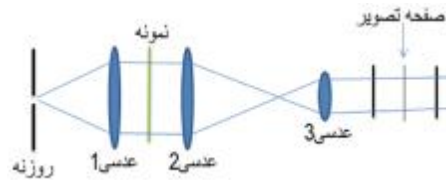
قبل، معادله انتقال شدت و فاز حل می‌شود. نتیجه در شکل 3 نمایش داده شده است. با توجه به اینکه برای باریکه از شدت یکنواخت استفاده شد که در لبه‌های تصویر نیز ادامه دارد جواب قابل قبولی برای بازسازی فاز به دست نمی‌آید. شکل‌های 4 و 5 یک سطر و ستون از ماتریس فاز بازسازی شده و فاز اصلی را به طور هم‌زمان نشان می‌دهند که اختلاف آنها کاملاً مشهود است.

برای حل این مشکل با قرار دادن یک روزنه اضافی در محل نمونه، مطابق شکل 9 و حل دوباره معادله انتقال شدت با رابطه 4 جواب مناسبی به دست آمد که در شکل 6 نشان داده شده است. شکل 7 و 8 نیز ترسیم یک سطر و ستون از فاز بازسازی شده و فاز اصلی است. در واقع قرار دادن روزنه باعث می‌شود که شرایط مرزی صفر به صورت اجباری وارد مسئله شود و در نتیجه روش حل به درستی پاسخ دهد. با استفاده از دستور std در نرم‌افزار متلب مقدار انحراف معیار برای اختلاف دو فاز بازسازی شده و فاز با مقدار دقیق، برای ماتریس در صورت حذف جواب‌های مربوط به 5 سلول از لبه‌ها، برابر با 0/004 رادیان به دست آمد که نشان دهنده درست کار کردن روش حل TIE است. برای اینکه در محاسبات عددی بتوان اثر روزنه را وارد کرد باید توجه نمود که در حالت ایده‌آل در محل صفحه تصویر ( $z=0$ )، روزنه هیچ‌گونه پراشی ایجاد نخواهد کرد و با کمک یک ماسک صفر و یک در این محل، می‌توان روزنه را شبیه‌سازی کرد، یعنی کافی است شدت و فازهایی که در خارج از ابعاد روزنه قرار می‌گیرند را در ماتریس داده‌ها (ماتریس شدت و ماتریس فاز فرضی) به صفر ضرب کرد.

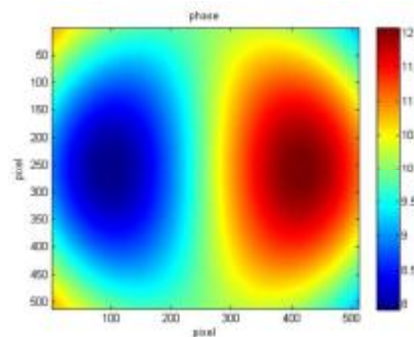


شکل 3. فاز بازسازی شده بدون قرار دادن روزنه

باریکه‌ای با شدت ( $I_0$ ) یکنواخت و توزیع فاز ( $q$ )، نمایش داده شده در شکل 2، انتخاب شده است این توزیع فاز به صورت کاملاً دلخواه انتخاب شده و هر شکل دیگری می‌تواند داشته باشد. میدان الکتریکی این باریکه به صورت  $E = \sqrt{I_0} e^{iq}$  در محل  $z=0$  تعریف می‌شود.



شکل 1. چیدمان آزمایش

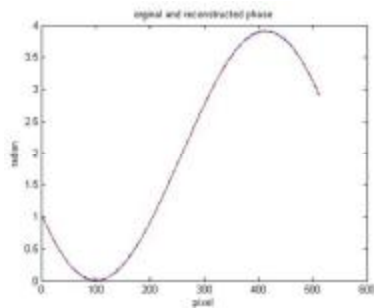


شکل 2. فاز استفاده شده برای باریکه.

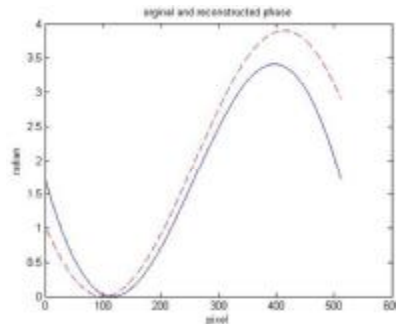
برای انتشار امواج الکترومغناطیسی روش‌های عددی مختلفی معرفی شده‌اند که برخی از آنها در کتاب "شبیه‌سازی عددی انتشار موج اپتیکی - با مثال‌هایی در matlab" ارائه شده است. در این مقاله از روش ارائه شده در [11] استفاده شده است که شدت در موقعیت جدید با رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$I(x, y, z \pm dz) = I(x, y, z) \pm \frac{dz}{k} \mathbf{N}_\lambda \cdot (I(x, y, z) \mathbf{N}_\lambda q) \quad (6)$$

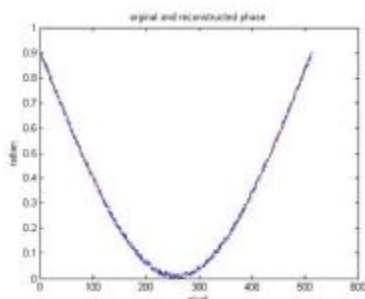
با این رابطه باریکه به اندازه  $\frac{dz}{2}$  به جلو و به همین اندازه به عقب انتشار داده می‌شود و شدت‌ها به ترتیب با نام  $I_1$  و  $I_2$  به دست می‌آیند با در نظر گرفتن طول موج  $632/8$  نانومتر برای باریکه (لیزر هلیوم نئون) جمله  $-\frac{\pi}{k} \frac{\partial I}{\partial z}$  محاسبه می‌شود و سپس با رابطه 4 اشاره شده در قسمت



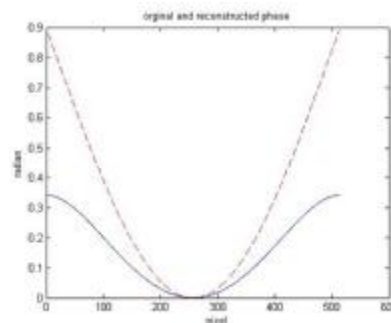
شکل 7. سطر 200 از شکل 6 (خط چین) و شکل 2 (خط توپر)



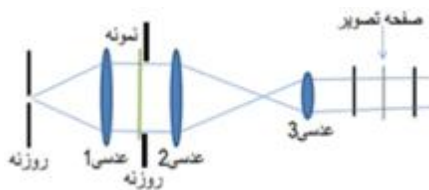
شکل 4. سطر 200 از شکل 3 (خط چین) و شکل 2 (خط توپر)



شکل 8. ستون 200 از شکل 6 (خط چین) و شکل 2 (خط توپر)



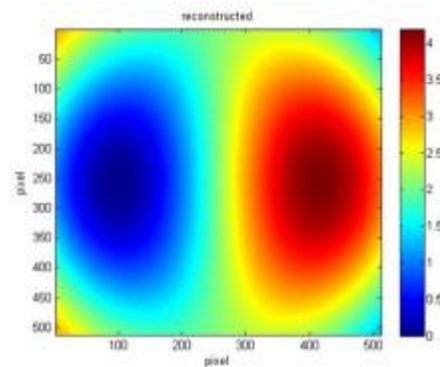
شکل 5. ستون 200 از شکل 3 (خط چین) و شکل 2 (خط توپر)



شکل 10. اضافه کردن روزنه جدید به چیدمان آزمایش

### بحث و نتیجه گیری

با استفاده از قرار دادن روزنه در چیدمان آزمایش (در آزمایش‌هایی که امکان آن وجود دارد) در مواردی که شدت باریکه در کناره‌های توزیع شدت به صفر میل نمی‌کند، می‌توان معادله انتقال شدت و فاز را حل کرد و این روزنه شرایط مرزی صفر را به اجبار وارد داده‌های مسئله می‌کند.



شکل 6. فاز بازسازی شده با قرار دادن روزنه

### منابع

- [1] D. Malacara, Optical shop testing, Wiley-Interscience A John Wiley Sons, Inc (2007).
- [2] M.R. Teague, Irradiance moments: their propagation and use for unique retrieval of phase, J. Opt. Soc. Am. 72 (1982) 1199-1209.
- [3] N. Streibl, Phase imaging by the transport equation of intensity, Opt. Commun. 49 (1984) 6-10.
- [4] K. Ichikawa, A.W. Lohmann, M. Takeda, Phase retrieval based on the irradiance transport equation and the Fourier transform method: experiments, Appl. Opt. 27 (1988) 3433-3436.
- [5] F. Roddier, Wavefront sensing and the irradiance transport equation, Appl. Opt. 29 (1990) 1402-1403.

- [6] M.R. Teague, Deterministic phase retrieval: a Green's function solution, *J. Opt. Soc. Am.* 73 (1983) 1434–1441.
- [7] D. Van Dyck and W.Coene, A new procedure for wave function restoration in high resolution electron microscopy, *Optik*, 77 (1987) 125–128.
- [8] M. Beleggia, M.A. Schofield, V.V. Volkov, and Y.Zhu, On the transport of intensity technique for phase retrieval, *Ultramicroscopy*, 102 (2004) 37–49.
- [9] K. Ishizuka, and B. Allman, Phase measurement of atomic resolution image using transport of intensity equation, *Journal of Electron Microscopy*, 54 (2005) 191-197.
- [10] T.E. Gureyev, and K.A. Nugent, Phase retrieval with the transport-of-intensity equation. II. Orthogonal series solution for nonuniform illumination, *J. Opt. Soc. Am. A*, 13 (1996) 1670-1682.
- [11] V.V. Volkov; Y. Zhu, and M. de Graef, A new symmetrized solution for phase retrieval using the transport of intensity equation, *micron*, 33 (2002) 411-416.