

**ORIGINAL ARTICLE**

# Trilayer Permanent Magnetic Lattice for Ultracold Atoms

Saeed Ghanbari\*

1 Assistant Professor, Department of Physics, University of Zanjan, Zanjan, Iran

**Correspondence**

Saeed Ghanbari

Email: [sghanbari@znu.ac.ir](mailto:sghanbari@znu.ac.ir)

**How to cite**

Ghanbari, S. (2023). Trilayer Permanent Magnetic Lattice for Ultracold Atoms, *Optoelectronic*, 6(1), 13-24.

## ABSTRACT

We introduce a trilayer permanent magnetic lattice for ultracold atoms which is created by two 2D arrays of square magnetic slabs plus a bias magnetic field. Three separate 2D arrays of magnetic microtraps located above the top layer of magnetic slabs, below the bottom layer and between them are produced. We provide analytical expressions for determining the location of non-zero magnetic field minima, as well as other physical quantities such as the absolute value of the magnetic field ( $B$ ), curvatures, and trap frequencies at each minimum. The analytical expressions for  $B$  are in good agreement with the numerical results. Therefore, all the analytical expressions extracted from them are reliable. Some of the relevant physical quantities can be controlled using the bias magnetic field. Also, the trap frequencies between the magnetic layers in a trilayer lattice are higher compared to those in a bilayer lattice created by a single layer of magnets. Therefore, atom loss decreases and a better confinement is provided for them.

## KEYWORDS

Quantum Information, Bose-Einstein Condensates, Optical Lattices, Periodic Potentials, Quantum Spin Models, Atom Chips, Artificial Crystals.

فصلنامه علمی  
اپتوالکترونیک

«مقاله پژوهشی»

## شبکه مغناطیسی دائمی سه لایه‌ای برای اتم‌های فراسرد

سعید قنبری\*

1 استادیار، گروه فیزیک، دانشگاه زنجان، زنجان، ایران.

### چکیده

ما یک شبکه مغناطیسی دائمی سه لایه‌ای را برای اتم‌های فراسرد معرفی می‌کنیم که توسط دو آرایه دو بعدی از بره‌های مربعی مغناطیسی به همراه یک میدان مغناطیسی یکنواخت خارجی ایجاد می‌شود. سه آرایه دو بعدی مجزا از میکروته‌های مغناطیسی، در بالای لایه ی بالایی بره‌های مغناطیسی، زیر لایه پایینی و بین آنها تولید می‌شود. ما عبارتی تحلیلی برای تعیین مکان کمینه‌های میدان مغناطیسی غیر صفر و همین‌طور برای مشخص کردن مقادیر فیزیکی دیگری، مانند اندازه میدان مغناطیسی (B)، خمیدگی‌ها و بسامدهای تله در هر کمینه ارائه می‌کنیم. عبارتهای تحلیلی برای B با نتایج عددی همخوانی خوبی دارند. بنابراین، تمام عبارتهای تحلیلی به دست آمده از آنها قابل اعتماد هستند. برخی از کمیت‌های فیزیکی مرتبط را می‌توان با استفاده از میدان مغناطیسی یکنواخت کنترل کرد. همچنین، بسامدهای تله بین لایه‌های مغناطیسی در یک شبکه سه لایه‌ای، در مقایسه با بسامدهای ایجاد شده توسط یک لایه از آهنرباها در یک شبکه دو لایه‌ای بالاتر هستند. بنابراین، از دست دادن اتم‌ها کاهش می‌یابد و محدودسازی بهتری برای آنها فراهم می‌شود.

### واژه‌های کلیدی

اطلاعات کوانتومی، چگالیده‌های بوز-اینشتین، شبکه‌های اپتیکی، پتانسیل‌های تناوبی، مدل‌های اسپینی کوانتومی، تراشه‌های اتمی، بلورهای مصنوعی.

نویسنده مسئول:

سعید قنبری

رایانامه: [sghanbari@znu.ac.ir](mailto:sghanbari@znu.ac.ir)

استناد به این مقاله:

سعید قنبری (1402). شبکه مغناطیسی دائمی سه لایه‌ای برای اتم‌های فراسرد. فصلنامه علمی اپتوالکترونیک، 6(1)، 13-24.

## مقدمه

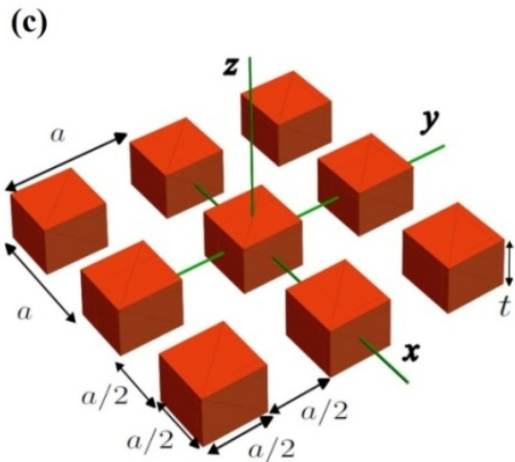
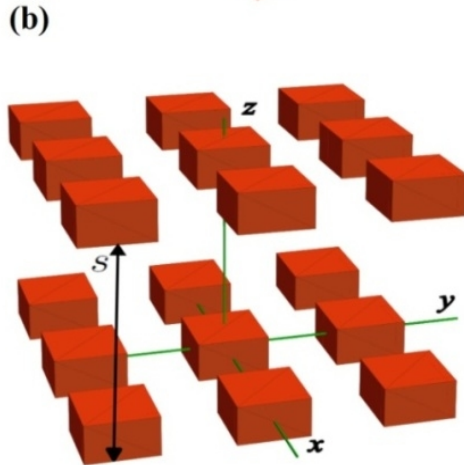
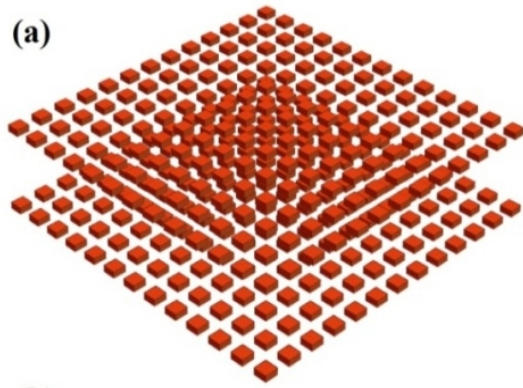
گزارش شده است [27]. به ویژه، به دام‌اندازی اتم‌های  $^{87}\text{Rb}$  در یک شبکه مغناطیسی مثلثی دو بعدی با دوره تناوب زیر میکرونی ممکن و اندازه‌گیری طول عمر اتم‌های به دام‌افتاده انجام شده است [28]. افزون بر این، در راستای ایجاد شبکه‌هایی با وضوح بالا، با استفاده از روشانی پرتوی مولکولی، لایه نشانی  $\text{FePt}$  تک بلوری با ضخامت 50 نانومتر با موفقیت انجام شده است [8]. این شبکه‌های مغناطیسی دائمی قابلیت ایجاد دوره‌های تناوب و هندسه‌های مختلفی [10] همچون ساختارهای مثلثی، لانه زنبوری و کاگومه را دارند، که برای مطالعه مدل‌های اسپینی کوانتومی و اتم‌های فراسرد مناسب هستند.

از سوی دیگر، شبکه‌های اپتیکی، که از تداخل پرتوهای لیزری ایجاد می‌شوند [29]، برای محدودسازی، دستکاری و کنترل اتم‌های فراسرد و چگالیده‌های بوز-اینشتین بسیار ارزشمند هستند [30]. کاربردهای این شبکه‌ها به‌عنوان ابزاری ایده‌آل برای انجام آزمایش‌های فیزیک کوانتومی بنیادی، از جمله مطالعه گازهای کوانتومی با ابعاد پایین [31] و پدیده‌های تونل‌زنی کوانتومی، مانند گذار فاز کوانتومی ابرشاره به نارسانای مات [32،33] است. همچنین، استفاده از آن‌ها و کیوبیت‌های ساخته شده از اتم‌های خنثای به دام‌افتاده در آن‌ها برای ذخیره‌سازی و پردازش اطلاعات کوانتومی در حال انجام است [34،35].

شبکه‌های اپتیکی سه بعدی برای مدل‌سازی سامانه‌های برهمکنشی ماده چگال، با استفاده از اتم‌های فراسرد فرمیونی، که توسط مدل هابارد توصیف می‌شوند، نمایشی موفقیت‌آمیز داشته‌اند. به شکل چشم‌گیری، محدودسازی یک مخلوط اسپینی با برهمکنش رانشی از اتم‌های فراسرد  $^{87}\text{Rb}$  با نشان دادن گذار فاز آن از فلز رقیق تراکم‌پذیر به نارسانای نواری مطالعه شده است [36]. علاوه بر این، افزایش دقت ساعت‌های اپتیکی پیشرفته با بارگذاری اتم‌های استرانسیوم فرمیونی در شبکه‌های اپتیکی سه بعدی [37] با هدف بهره‌گیری از افزایش قابلیت به دام‌اندازی و پردازش در شبکه‌های سه بعدی نسبت به شبکه‌های دو بعدی گزارش شده است. همچنین، قابلیت شبکه‌های سه بعدی در بررسی نظریه‌های ماده چگال، با ساخت بلورهای مصنوعی، بررسی شده است [38].

شبکه‌های مغناطیسی دائمی و شبکه‌های مغناطیسی بر مبنای سیم‌های حامل جریان در مقایسه با شبکه‌های اپتیکی

آرایه‌هایی تناوبی از میکروتله‌های مغناطیسی با استفاده از سیم‌های حامل جریان [1،2] و بره‌های مغناطیسی دائمی [3-10] معرفی شده‌اند که برای به دام‌اندازی و دست‌کاری اتم‌های فراسرد به کار می‌روند. در مطالعات بنیادی بر روی اتم‌های فراسرد، شامل گازهای واگن کوانتومی و چگالیده‌های بوز-اینشتین از این میکروتله‌ها به طور گسترده‌ای استفاده می‌شود [11]. شبکه‌های مغناطیسی یک بعدی، از آرایه‌هایی از تله‌های دو بعدی (موجبرها) [12] ساخته شده‌اند، که با استفاده از سیم‌های حامل جریان [1] و ساختارهای مغناطیسی دائمی [13-15] بر روی تراشه‌های اتمی ایجاد می‌شوند. همچنین، با آرایه‌هایی متقاطع از سیم‌های دارای جریان الکتریکی می‌توان شبکه‌هایی دو بعدی از میکروتله‌های مغناطیسی سه بعدی ایجاد کرد [16،17]. چندین پیکربندی برای شبکه‌های مغناطیسی دائمی پیشنهاد شده [3،10،18]، که با استفاده از عبارت‌های تحلیلی و محاسبات عددی ویژگی‌های آن‌ها را مطالعه کرده‌اند [3،4،19،20]. میکروتله‌ها در این شبکه‌ها دارای کمینه انرژی پتانسیل غیرصفر هستند و با استفاده از یک میدان مغناطیسی یکنواخت خارجی، امکان کنترل عمق و بسامد تله وجود دارد. در یک شبکه مغناطیسی دائمی دو بعدی مطالعه بر روی گذار فاز کوانتومی از ابرشاره به نارسانای مات و پارامترهای بحرانی مربوط به آن انجام شده است [21]. علاوه بر این، برای طراحی تله‌های شبکه‌های مغناطیسی دوبعدی آیف-پریچارد، یک الگوریتم ارائه شده است [6]. در پژوهش دیگری نشان داده شده که ابرهایی از اتم  $^{87}\text{Rb}$  با موفقیت در موجبرهای مغناطیسی دائمی بارگذاری شده‌اند [22]. دو پژوهش دیگر با تمرکز بر بازتاب اتم‌های فراسرد در یک موجبر [3] و به دام انداختن چگالیده‌های بوز-اینشتین  $^{87}\text{Rb}$ ، نزدیک به سطح همان موجبر انجام شده است [23]. برخی تلاش‌ها نشان از بارگذاری اتم‌های فراسرد در شبکه‌های مغناطیسی مثلثی و دو بعدی [24] دارند و برای مطالعه چگالیده‌های بوز-اینشتین به دام‌افتاده در یک شبکه مغناطیسی یک بعدی از طیف‌سنجی بسامد رادیویی (RF) استفاده شده است [25]. ساخت شبکه‌های مغناطیسی مثلثی و دو بعدی مربعی با دوره‌های تناوب زیر میکرونی در یک بررسی دیگر گزارش شده است [26]. در سال 2017 شبیه‌سازی مدل‌های اسپینی شبکه‌ای، بر اساس یک طراحی مبتنی بر اتم‌های ریدبرگ، در پژوهشی



**شکل 1.** (a) دو آرایه دو بعدی از برهه‌های مغناطیسی مربعی. این پیکربندی از آهنرباها به همراه یک میدان مغناطیسی یکنواخت خارجی، یک شبکه مغناطیسی دائمی سه لایه‌ای ایجاد می‌کند. (b) مرکز برهه‌های مربعی در آرایه پایینی در صفحه  $z = 0$  قرار دارد و فاصله بین سطوح پایینی (بالایی) دو لایه  $s$  است. (c) در هر لایه برهه‌هایی با مغناطش یکنواخت، در امتداد جهت مثبت محور  $z$ ، ضخامت  $t$  و دوره تناوب  $a$  در امتدادهای  $x$  و  $y$  وجود دارد. اتم‌های فراسرد، در بالای لایه بالایی، بین دو لایه و در زیر لایه پایینی به دام می‌افتند.

دارای مزیت‌هایی هستند. پس از بارگذاری اتم‌ها در آن‌ها، این شبکه‌ها نیازی به لیزر و هم‌راستاسازی پرتوهای لیزری ندارند و ناهمدوسی مربوط به گسیل خود به خودی را به حداقل می‌رسانند [40,39]. علاوه بر این، در ساختارهای مغناطیسی، میکرو تله‌ها دارای خمیدگی میدان مغناطیسی بزرگ، عمق زیاد و در نتیجه بسامدهای تله کنترل‌پذیر بسیار بالایی هستند. اتم‌هایی که در حالت‌های مغناطیسی بسیار پایین به دام می‌افتند دارای کمینه اتلاف اتمی از راه چرخش‌های مایورانا هستند و سردسازی تبخیری را آسان می‌کنند [41]. درحالی که شبکه‌های مغناطیسی مبتنی بر سیم‌های حامل جریان، به دلیل چگالی جریان بالا [2]، می‌توانند به دلیل گرم شدن اتم‌ها در نزدیکی سطوح، منجر به اتلاف اتمی شوند، شبکه‌های مغناطیسی دائمی میکرو تله‌هایی بسیار پایدار و با اختلال کم ایجاد می‌کنند. به دلیل محصورسازی بهتر اتم‌ها، به خاطر بسامدهای تله بالا و انعطاف در طراحی، تراشه‌های اتمی مبتنی بر برهه‌های مغناطیسی دائمی نسبت به تله‌های مغناطیسی مبتنی بر سیم‌های حامل جریان برتری دارند [42,23,10]. به طور کلی، شبکه‌های مغناطیسی دائمی، که با لایه‌های مغناطیسی با کیفیت بالا در هندسه‌های مختلفی ایجاد می‌شوند، تضمین‌کننده ثبات و تکرارپذیری هستند.

ما در این مقاله، شبکه مغناطیسی دائمی سه لایه‌ای را برای به‌دام‌اندازی اتم‌های فراسرد معرفی می‌کنیم، که با استفاده از دو آرایه دو بعدی از برهه‌های مغناطیسی مربعی به اضافه یک میدان مغناطیسی یکنواخت خارجی، ایجاد می‌شود. همچنین عبارت‌هایی تحلیلی برای کمیت‌های فیزیکی مرتبط در بالای لایه بالایی آهنرباها، بین دو لایه و زیر لایه پایینی ارائه می‌کنیم.

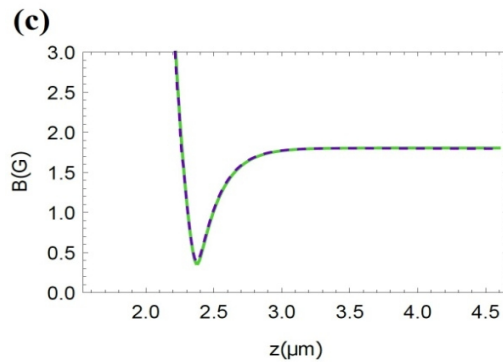
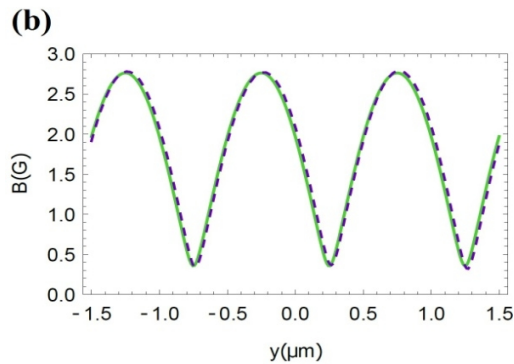
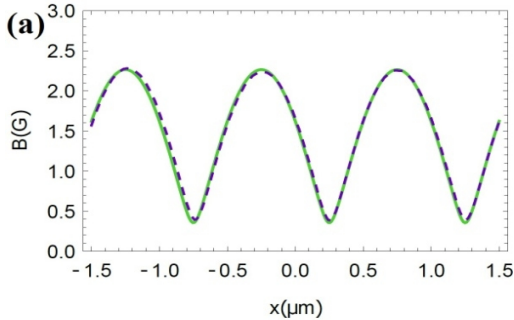
### شبکه مغناطیسی دائمی سه لایه‌ای

شکل 1، دو آرایه دو بعدی از برهه‌های مغناطیسی مربعی را با مغناطش عمود بر سطح، ضخامت  $t$  و دوره‌های تناوب  $a$  در جهت‌های  $x$  و  $y$  نشان می‌دهد. بر اساس شکل‌های (b) و (c)، مرکز برهه‌های مربعی در لایه پایینی در صفحه  $z = 0$  است. در محاسبات عددی تعداد محدود  $31 \times 31 = 961$  برهه مغناطیسی مربعی در هر لایه و در محاسبات تحلیلی، تعداد بی‌نهایت برهه مربعی را در هر لایه در نظر گرفته‌ایم.

نسبت به  $x$ ، یک بار نسبت به  $y$  و یک بار هم نسبت به  $z$  مشتق گرفته و هر کدام را مساوی با صفر قرار داده‌ایم. سپس، دستگاه معادلات سه مجهولی به دست آمده را حل کرده‌ایم. همچنین، با جایگذاری مقادیر بالا در معادله (2)، معادله (3) را به دست آورده‌ایم. معادلات (3) و (4c) محدودیت‌های:

$$|B_{1x} - B_{1y}| > 0 \quad (5a)$$

$$2B_0(1 + e^{-ks})e^{-(1+kt/2)} \gg -(B_{1x} + B_{1y}) > 0 \quad (5b)$$



**شکل 2.** مقایسه مقادیر تحلیلی (خط پیوسته) و عددی (خط چین)  $B$  بالای لایه بالایی آهنرباها. در (a)  $y = y_{min}$  و در (b)  $z = z_{min}$ ، در (c)  $x = x_{min}$  و  $z = z_{min}$  و در (c)  $x = x_{min}$  و  $y = y_{min}$  و در اینجا  $x_{min}$ ،  $y_{min}$  و  $z_{min}$ ، به ترتیب، از معادلات (4a)، (4b) و (4c) به دست می‌آیند. در اینجا،  $n_x$  و  $n_y$ ، هردو صفر هستند. پارامترهای ورودی هم در جدول 1 فهرست شده‌اند.

### شبکه دو بعدی میکروتله‌ها در بالای لایه بالایی آهنرباها

با فرض میدان خارجی یکنواخت  $\vec{B}_1 = B_{1x}\hat{x} + B_{1y}\hat{y}$  می‌توان در بالای لایه بالایی مؤلفه‌های میدان مغناطیسی را، برای  $z \gg s + t/2 + a/2\pi$  نوشت. در مرجع [4] مؤلفه‌های میدان در بالای یک آرایه از بره‌های مربعی مغناطیسی داده شده است، که با استفاده از آن‌ها مؤلفه‌های میدان برآیند دو لایه را به دست می‌آوریم. برای این که مؤلفه‌های میدان برای لایه بالایی به دست آید، کافیست که در مؤلفه‌های میدان برای لایه پایینی،  $z$  را به  $z - s$  تبدیل کنیم. به این ترتیب، مؤلفه‌های میدان کل دو لایه به همراه میدان یکنواخت خارجی به دست می‌آیند

$$B_x = B_{01} \sin(kx) e^{-kz} + B_{1x} \quad (1a)$$

$$B_y = B_{01} \sin(ky) e^{-kz} + B_{1y} \quad (1b)$$

$$B_z = B_{01} [\cos(kx) + \cos(ky)] e^{-kz} \quad (1c)$$

که در آن  $B_{01} = B_0(1 + e^{ks})$ ،  $k = 2\pi/a$  و  $B_0 = 4M_z \sinh(kt/2)$  (واحد‌های گاوسی) مغناطش در امتداد محور  $z$  و بر اساس شکل (b)،  $s$  فاصله بین سطوح پایینی (بالایی) دولایه است. اندازه میدان مغناطیسی در بالای آرایه بالایی عبارت است از:

$$B(x, y, z) = \{B_{1x}^2 + B_{1y}^2 + 2B_{01}[B_{1x} \sin(kx) + B_{1y} \sin(ky)]e^{-kz} + 2B_{01}^2[1 + \cos(kx)\cos(ky)]e^{-2kz}\}^{1/2} \quad (2)$$

در بالای لایه بالایی آهنرباها، یک آرایه دو بعدی از میکروتله‌های مغناطیسی با مقدار کمینه میدان داریم:

$$B_{min} = \frac{|B_{1x} - B_{1y}|}{\sqrt{2}} \quad (3)$$

برای جلوگیری از اتلاف اتمی ناشی از چرخش‌های مایورانا برای اتم‌های فراسرد آماده شده در حالت‌های جستجوگر میدان مغناطیسی ضعیف [39] نیاز به این کمینه‌های میدان مغناطیسی غیرصفر داریم که در مختصات زیر قرار دارند:

$$x_{min} = (n_x - \frac{1}{4} \frac{|B_{1x}|}{B_{1x}})a \quad n_x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4a)$$

$$y_{min} = (n_y - \frac{1}{4} \frac{|B_{1y}|}{B_{1y}})a \quad n_y = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4b)$$

$$z_{min} = s + \frac{a}{2\pi} \ln \left[ \frac{2B_0(1 + e^{-ks})}{-B_{1x} - B_{1y}} \right] \quad (4c)$$

برای به دست آوردن معادلات بالا از معادله (2)، یک بار

قراردادن مقدار آن هم می‌توان به این نتیجه رسید. خمیدگی‌های میدان مغناطیسی را در مرکز تله‌ها می‌توان از روابط زیر به دست آورد:

$$\frac{\nabla^2 B}{\nabla x_j^2} = \frac{4p^2 B_{1xj} (B_{1x} + B_{1y})}{a^2 \sqrt{2} |B_{1x} - B_{1y}|}, \quad j = 1, 2 \quad (7a)$$

$$\frac{\nabla^2 B}{\nabla z^2} = \frac{\nabla^2 B}{\nabla x^2} + \frac{\nabla^2 B}{\nabla y^2} = \frac{4p^2 (B_{1x} + B_{1y})^2}{a^2 \sqrt{2} |B_{1y} - B_{1x}|} \quad (7b)$$

بسامدهای‌های تله هم برای یک اتم در حالت فوق ریز  $F$ ، با عدد کوانتومی مغناطیسی  $m_F$  از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$w_{xj} = \frac{2pg}{a} \sqrt{\frac{B_{1xj} (B_{1x} + B_{1y})}{\sqrt{2} |B_{1y} - B_{1x}|}}, \quad j = 1, 2 \quad (8a)$$

جدول 1. پارامترهای ورودی در محاسبات تحلیلی و عددی برای یک شبکه مغناطیسی سه لایه‌ای

پارامتر	تعریف	عددی	تحلیلی
$n_s$	تعداد آهنرباهای مربعی در هر یک از راستاهای $x$ و $y$	31	¥
$a$ ( $\mu\text{m}$ )	دوره تناوب شبکه مغناطیسی	1.000	1.000
$t$ (nm)	ضخامت بره‌های مغناطیسی	31.25	31.25
$s$ ( $\mu\text{m}$ )	فاصله بین سطوح پایینی (بالایی) دو لایه	1.700	1.700
$4pM_z$ (G)	مغناطش در راستای $z$	2800	2800
$B_{1x}$ (G)	مؤلفه میدان مغناطیسی خارجی در راستای $x$	-1.000	-1.000
$B_{1y}$ (G)	مؤلفه میدان مغناطیسی خارجی در راستای $y$	-1.500	-1.500
$B_{1z}$ (G)	مؤلفه میدان مغناطیسی خارجی در راستای $z$	-1.145	0

$$w_z = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \frac{2pg}{a} \sqrt{\frac{|B_{1x} + B_{1y}|}{\sqrt{2} |B_{1y} - B_{1x}|}} \quad (8b)$$

که در آن‌ها  $g = \sqrt{m_F g_F m_B / m}$ ،  $m_B$  مگنتون بوهر،  $g_F$  ضریب لانده و  $m$  جرم اتمی است. اختلاف انرژی پتانسیل با مقدار کمینه آن را می‌توانیم نزدیک نقطه کمینه به صورت یک تابع نوسانگر هماهنگ ساده ناهمسانگرد در نظر بگیریم. به این ترتیب، با توجه به رابطه بین انرژی پتانسیل و اندازه میدان مغناطیسی [23]، یعنی  $U = m_F g_F \mu_B B$  بسامدهای تله را به دست آورده‌ایم.

### شبکه دو بعدی میکرو تله‌ها بین لایه‌های مغناطیسی

برای به دست آوردن مؤلفه‌های میدان بین دو لایه، به مؤلفه‌های میدان مغناطیسی لایه پایینی، در بالای آن و همین‌طور به مؤلفه‌های میدان مغناطیسی لایه بالایی در زیر آن نیاز داریم. با استفاده از معادلاتی مشابه معادلات (1)، برای

را روی مغناطش، پارامترهای هندسی  $t$ ،  $a$  و  $s$  و همین‌طور روی مؤلفه‌های میدان مغناطیسی خارجی اعمال می‌کنند. چون می‌خواهیم که کمینه میدان صفر نباشد، از معادله (3) شرط اول را به دست آورده‌ایم. شرط دوم هم با توجه به این به دست می‌آید که شناسه تابع لگاریتم طبیعی باید مثبت باشد. همچنین، شرط اولیه را در مورد مقادیر  $z$ ، که در ابتدای این بخش، پیش از معادله (1) در نظر گرفتیم، یعنی این که  $z \gg s + t/2 + a/2\pi$  باشد، در مورد  $z_{min}$  هم به کار برده‌ایم.

مطابق شکل 2، میکروتله‌هایی با کمینه‌های غیرصفر و هم‌خوانی خوبی بین نتایج تحلیلی و عددی برای اندازه میدان مغناطیسی،  $B$ ، در راستاهای  $x$ ،  $y$  و  $z$  وجود دارد. جدول 1

پارامترهای ورودی را نشان می‌دهد، که براساس آن، مؤلفه‌های میدان خارجی  $B_{1x} = -1.000$  G و  $B_{1y} = -1.500$  G برای هر دو محاسبه عددی و تحلیلی استفاده می‌شود. برای به حساب آوردن اثر تعداد محدود بره‌ها (اثر لبه‌ها) مؤلفه جبرانی  $B_{1z} = -4.003$  G هم در محاسبات عددی در نظر گرفته شده است. ارتفاع تله‌ها در راستاهای  $x$ ،  $y$  و  $z$  توسط رابطه‌های

$$DB^{xj} = \sqrt{2B_{1xj}^2 + (B_{1x} + B_{1y})^2 / 2} - B_{min}, \quad j = 1, 2 \quad (6a)$$

$$DB^z = (B_{1x}^2 + B_{1y}^2)^{1/2} - B_{min}, \quad (6b)$$

که در آن‌ها  $x_1 = x$  و  $x_2 = y$  است، داده می‌شوند. برای به دست آوردن مقادیر بیشینه در راستاهای  $x$  و  $y$ ، این نکته را در نظر گرفته‌ایم که، با توجه به شکل 2، فاصله بین یک کمینه و بیشینه نزدیک به آن، برابر با نصف دوره تناوب است، که با مشتق گرفتن از اندازه میدان و برابر با صفر

$$\frac{\mathbb{I}^2 B}{\mathbb{I}x_j^2} = \frac{4p^2}{a^2} \frac{2B_{02}^2 + B_{1xj}(B_{1x} + B_{1y})}{\sqrt{2}|B_{1y} - B_{1x}|}, \quad (13a)$$

$j = 1, 2$

$$\frac{\mathbb{I}^2 B}{\mathbb{I}z^2} = \frac{\mathbb{I}^2 B}{\mathbb{I}x^2} + \frac{\mathbb{I}^2 B}{\mathbb{I}y^2} \quad (13b)$$

$$\frac{\mathbb{I}^2 B}{\mathbb{I}z^2} = \frac{4p^2}{a^2} \frac{4B_{02}^2 + (B_{1x} + B_{1y})^2}{\sqrt{2}|B_{1y} - B_{1x}|}$$

همچنین، بسامدهای تله با روابط زیر داده می‌شوند:

$$w_{xj} = \frac{2pg}{a} \sqrt{\frac{2B_{02}^2 + B_{1xj}(B_{1x} + B_{1y})}{\sqrt{2}|B_{1y} - B_{1x}|}}, \quad j = 1, 2 \quad (14a)$$

$$w_z = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \frac{2pg}{a} \sqrt{\frac{4B_{02}^2 + (B_{1x} + B_{1y})^2}{\sqrt{2}|B_{1y} - B_{1x}|}} \quad (14b)$$

عبارت مثبت  $4B_{02}^2$  نشان دهنده بسامدهای تله بالاتر در بین لایه‌ها، در مقایسه با بالای آنهاست.

شبکه دو بعدی میکروتله‌ها در زیر لایه پایینی آهنرباها با استفاده از معادلات (1a)-(1c) و با در نظر گرفتن شرط  $|z| \gg t/2 + a/2\pi$  مؤلفه‌های میدان مغناطیسی کل دو لایه را در زیر آرایه پایینی هم به دست می‌آوریم:

$$B_x = -B_{03} \sin(kx) e^{kz} + B_{1x} \quad (15a)$$

$$B_y = -B_{03} \sin(ky) e^{kz} + B_{1y} \quad (15b)$$

$$B_z = B_{03} [\cos(kx) + \cos(ky)] e^{kz} \quad (15c)$$

که در آن،  $B_{03} = B_0(1 + e^{-ks})$  است و اندازه میدان مغناطیسی در پایین لایه پایینی به این صورت است:

$$B(x, y, z) = \{B_{1x}^2 + B_{1y}^2 - 2B_{03}[B_{1x} \sin(kx) + B_{1y} \sin(ky)]e^{kz} + 2B_{03}^2[1 + \cos(kx) \cos(ky)]e^{2kz}\}^{1/2} \quad (16)$$

اندازه کمینه میدان مغناطیسی با رابطه (3) مشخص می‌شود و مقادیر  $x_{\min}$  و  $y_{\min}$  به ترتیب از معادلات (4a) و (4b)، با تغییر علامت منفی بعد از  $n_x$  و  $n_y$  به مثبت، به دست می‌آیند. همچنین، رابطه زیر، کمینه میدان مغناطیسی در راستای  $z$  را می‌دهد:

مؤلفه‌های میدان در بالای یک آرایه دوبعدی از بره‌های مغناطیسی مربعی، می‌توان با تغییر جهت محور عمودی، تغییر علامت مغناطش و در نظر گرفتن تغییر علامت‌های لازم در مختصات و مؤلفه‌ها، میدان مغناطیسی را در زیر بره‌های مغناطیسی به دست آورد. با توجه به توضیحات بالا، با در نظر گرفتن میدان هر دولایه، مؤلفه‌های میدان کل را در بین دولایه به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$B_x = -B_{02} \sinh[k(z - s/2)] \sin(kx) + B_{1x} \quad (9a)$$

$$B_y = -B_{02} \sinh[k(z - s/2)] \sin(ky) + B_{1y} \quad (9b)$$

$$B_z = B_{02} \cosh[k(z - s/2)] [\cos(kx) + \cos(ky)] \quad (9c)$$

که در آن‌ها  $B_{02} = 2B_0 e^{-ks/2}$  است. اندازه میدان مغناطیسی هم در بین لایه‌ها عبارت است از:

$$B(x, y, z) = \{B_{02}^2 [\cos(kx) + \cos(ky)]^2 \cosh^2[k(z - s/2)] + (B_{1x} - B_{02} \sin(kx) \sinh[k(z - s/2)])^2 + (B_{1y} - B_{02} \sin(ky) \sinh[k(z - s/2)])^2\}^{1/2} \quad (10)$$

بین دو لایه، یک شبکه دو بعدی از میکروتله‌های مغناطیسی با کمینه غیرصفر وجود دارد که اندازه کمینه از رابطه (3) به دست می‌آید. همچنین، مختصات  $x_{\min}$ ،  $y_{\min}$  و  $z_{\min}$ ، به ترتیب، از معادلات (4a)، (4b) و معادله زیر به دست می‌آیند:

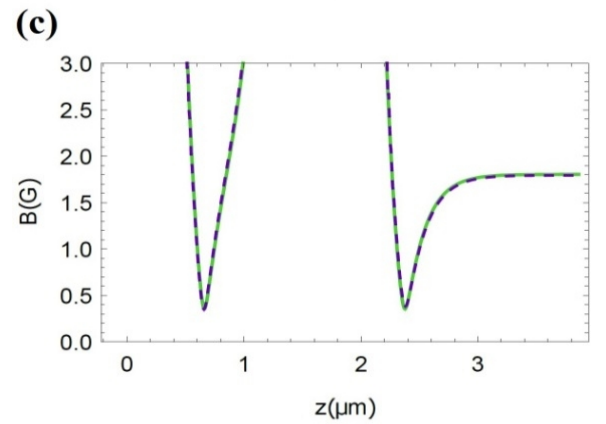
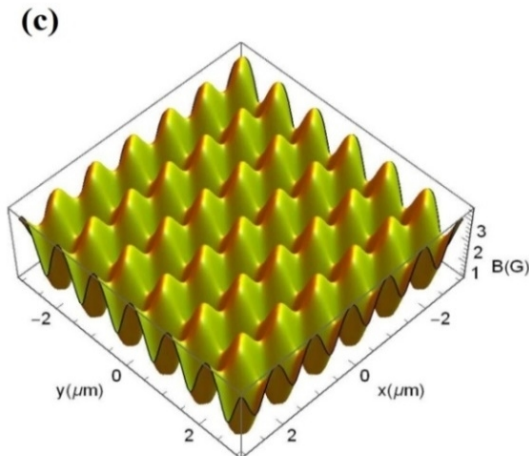
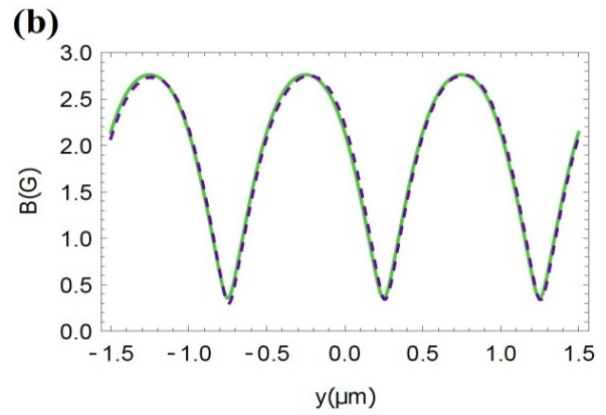
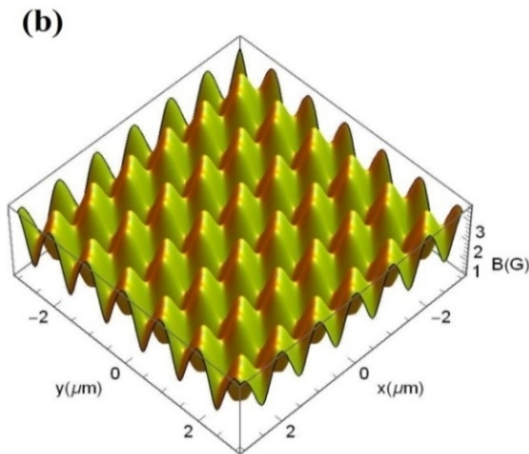
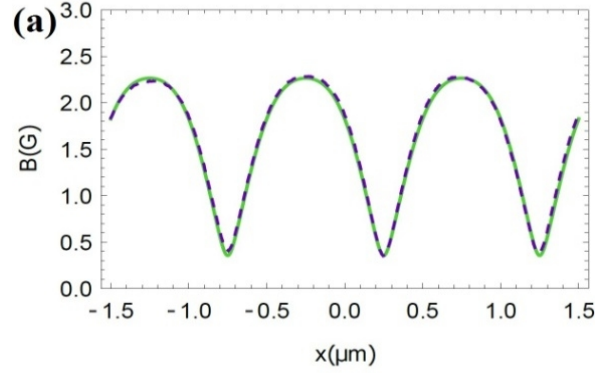
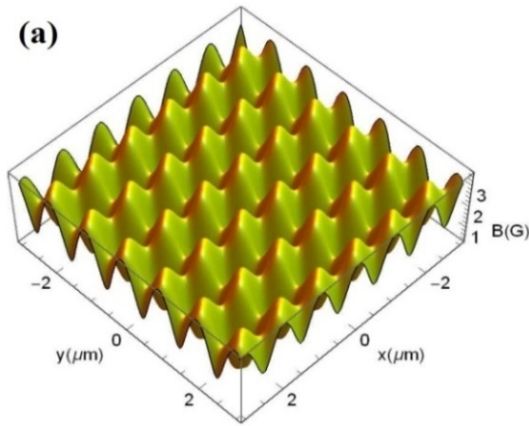
$$z_{\min} = \frac{s}{2} + \frac{a}{2p} \sinh^{-1} \left( \frac{B_{1x} + B_{1y}}{2B_{02}} \right) \quad (11)$$

بر اساس معادلات (4b)-(3) و (11) و همچنین، با توجه به شکل 3، که در آن نتایج عددی و تحلیلی را برای  $B$  در بین دو لایه مقایسه کرده‌ایم، یک آرایه دو بعدی از میکرو تله‌هایی با کمینه غیر صفر، برای به‌دام‌اندازی و کنترل اتم‌های فراسرد، وجود دارد. برای کمینه‌های غیرصفر میدان مغناطیسی در بین دو لایه، دوباره معادله (3) محدودیت (5a) را برقرار می‌کند و معادله (6a) ارتفاع تله‌ها را در راستاهای  $x$  و  $y$  نشان می‌دهد. برای ارتفاع در امتداد محور  $z$  معادله زیر را به دست می‌آوریم:

$$DB^z = \frac{p B_0}{\sinh(\frac{kt}{2})} - B_{\min} \quad (12)$$

در مرکز تله‌ها، خمیدگی‌های میدان مغناطیسی به صورت زیر هستند:

$$z_{\min} = -\frac{a}{2p} \ln\left(\frac{2B_{03}}{-B_{1x} - B_{1y}}\right) \quad (17)$$



**شکل 3.** مقایسه مقادیر تحلیلی (خط پیوسته) و عددی (خط چین)  $B$  بین دو لایه. مقادیر  $X_{\min}$ ،  $Y_{\min}$  و  $Z_{\min}$  به ترتیب با معادلات (4a) و (4c) و (11) به دست می‌آیند. در محاسبات عددی به جز  $B_{1z} = -1.155 G$ ، سایر پارامترها و جزئیات مانند شکل 2 است. در (c)، افزون بر نمودارهای اندازه میدان در بین دو لایه (در سمت چپ شکل)، اندازه میدان در بالای لایه بالایی هم (در سمت راست) دیده می‌شود.

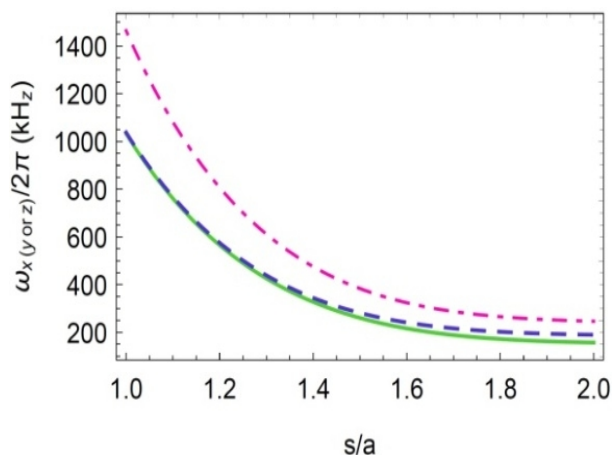
**شکل 4.** مقایسه مقادیر عددی  $B$  (خط چین) با نتایج تحلیلی (خط پیوسته) در زیر لایه پایینی آهنرباها که  $X_{\min}$ ،  $Y_{\min}$  و  $Z_{\min}$  از معادلات (4a)، (4b) و (17) به دست می‌آیند. در این جا، به جز  $B_{1z} = -1.164 G$ ، سایر پارامترها و جزئیات مانند شکل 3 است.



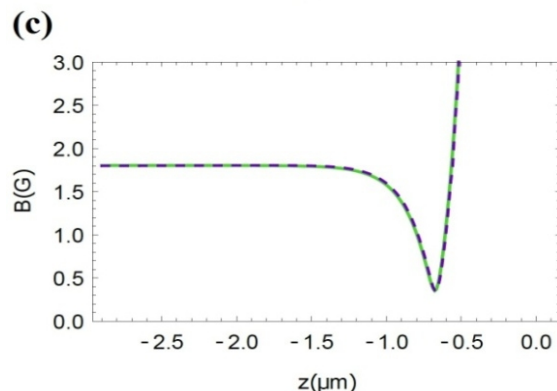
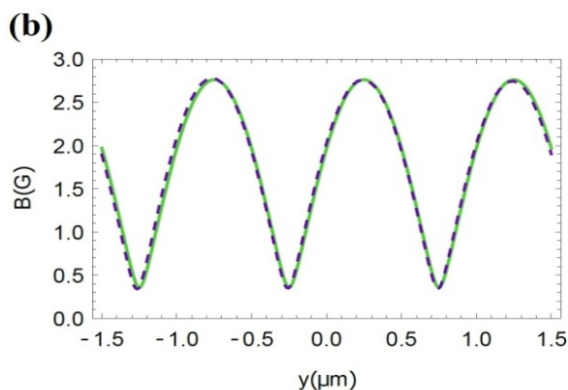
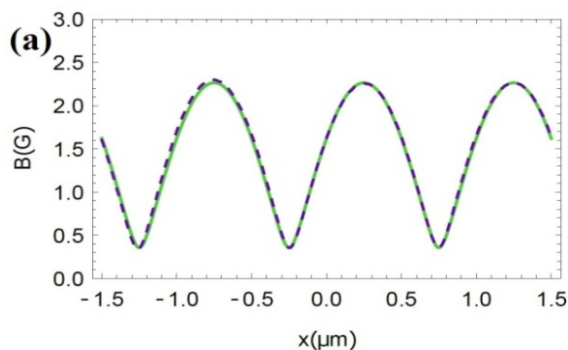
(6a)-(8b) به دست می‌آیند. در شکل 4، مقایسه مقادیر عددی و تحلیلی B در زیر لایه پایینی در جهت‌های x، y و z هم‌خوانی خوبی را نشان می‌دهد. شکل 5 هم نمودارهای سه بعدی B در بالای لایه بالایی، بین دو لایه و زیر لایه پایینی آهنرباها را نشان می‌دهد، که بر اساس آن یک شبکه مغناطیسی دائمی سه لایه‌ای از میکروتله‌ها داریم. برای هر آرایه دو بعدی از میکروتله‌ها  $z = z_{\min}$  است، که مقادیر مختلف  $z_{\min}$ ، در بالای لایه بالایی، بین دو لایه و زیر لایه پایینی آهنرباها، به ترتیب از معادله‌های (4c)، (11) و (17) به دست می‌آیند.

**جدول 2.** مقایسه بسامدهای تله براساس عبارت‌های تحلیلی برای شبکه‌های دولایه‌ای و برای شبکه‌های سه لایه‌ای در بین دو لایه. پارامترهای ورودی مانند پارامترهای تحلیلی در جدول 1 هستند.

سه لایه‌ای	دو لایه‌ای	بسامد
188.576	150.756	$\frac{\omega_x}{2\pi}$ (kHz)
216.613	184.638	$\frac{\omega_y}{2\pi}$ (kHz)
287.191	238.366	$\frac{\omega_z}{2\pi}$ (kHz)



**شکل 6.** بسامد تله‌ها برحسب  $s/a$  برای اتم‌های  $^{87}\text{Rb}$ ، در حالت جستجوگر میدان مغناطیسی ضعیف  $F = 2$  و  $m_F = +2$ ، بین دو لایه در یک شبکه مغناطیسی دائمی سه لایه‌ای. خطوط ممتد، خط چین و نقطه-خط چین، به ترتیب،  $w_x/2p$ ،  $w_y/2p$  و  $w_z/2p$  را بر حسب kHz نشان می‌دهند. تمام پارامترهای ورودی در جدول 1 فهرست شده‌اند.



**شکل 5.** نمودارهای سه بعدی از مقادیر تحلیلی B بالای لایه بالایی آهنرباها، (b) بین دو لایه و (c) در زیر لایه پایینی. با توجه به این نمودارها، ما یک شبکه مغناطیسی دائمی سه لایه‌ای از میکروتله‌های مغناطیسی غیر صفر داریم و پارامترهای ورودی، برای (a) در جدول 1 فهرست شده‌اند و به جز  $B_{1z} = 0$ ، برای (b) و (c) پارامترهای دیگر، به ترتیب، مانند شکل‌های 3 و 4 هستند.

در این شبکه، با کمینه میدان غیر صفر مغناطیسی، در زیر لایه‌های مغناطیسی پایینی هم، محدودیت‌های (5a) و (5b) توسط معادلات (3) و (17) بر مؤلفه‌های میدان خارجی، پارامترهای هندسی و مغناطیسی اعمال می‌شود. در زیر لایه پایینی، ارتفاع سدهای میدان مغناطیسی، خمیدگی‌های میدان مغناطیسی در مرکز تله‌ها و بسامدهای تله، مشابه مقادیر فیزیکی متناظر در بالای لایه بالایی هستند که از معادلات

### بحث و نتیجه‌گیری

ما یک شبکه مغناطیسی دائمی سه لایه‌ای ایجاد شده توسط آرایه‌هایی دو بعدی از آهنرباهای مربعی را معرفی کردیم و نشان دادیم که سه آرایه دو بعدی مجزا از میکروتله‌ها وجود دارد که در مقایسه با شبکه دو بعدی، تعداد اتم‌های به‌دام‌افتاده را سه برابر می‌کند. همچنین، از یک میدان مغناطیسی یکنواخت برای ایجاد کمینه‌های غیر صفر و تنظیم و کنترل برخی از پارامترهای تله استفاده کردیم. علاوه بر این، عبارت‌های تحلیلی برای کمیت‌های فیزیکی مربوطه را ارائه کردیم و مقادیر تحلیلی B را با نتایج عددی به دست آمده با استفاده [43] مقایسه کردیم. هم‌خوانی بین نتایج تحلیلی و عددی با استفاده از بسته نرم‌افزاری Radia خوب بود، اگرچه در محاسبات عددی، فقط  $31'31=961$  بره مغناطیسی مربعی را در هر لایه در نظر گرفتیم. علاوه بر این، نشان دادیم که بسامدهای تله در شبکه سه لایه‌ای در مقایسه با شبکه‌های دو لایه‌ای بالاتر هستند. این ویژگی، محصورسازی بهتر اتم‌های فراسرد را فراهم می‌کند و از دست دادن اتم‌ها را کاهش می‌دهد.

### References

- [1] A. Günther, S. Kraft, M. Kemmler, D. Koelle, R. Kleiner, C. Zimmermann, and J. Fortágh, Diffraction of a Bose-Einstein Condensate from a Magnetic Lattice on a Microchip. *Phys. Rev. Lett.* 95 (2005) 170405.
- [2] J. Fortágh and C. Zimmermann, Magnetic microtraps for ultracold atoms. *Rev. Mod. Phys.* 79 (2007) 235.
- [3] S. Ghanbari, T. D. Kieu, A. Sidorov and P. Hannaford, Permanent magnetic lattices for ultracold atoms and quantum degenerate gases. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* 39 (2006) 847–860.
- [4] S. Ghanbari, T. D. Kieu and P. Hannaford, A class of permanent magnetic lattices for ultracold atoms. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* 40 (2007) 1283–1294.
- [5] A. Abdelrahman, P. Hannaford, and K. Alameh, Adiabatically induced coherent Josephson oscillations of ultracold atoms in an asymmetric two-dimensional magnetic lattice. *Optics Express* 17 (2009) 24358.
- [6] R. Schmied, D. Leibfried, R. J. C. Spreeuw and S. Whitlock, Optimized magnetic lattices for ultracold atomic ensembles. *New J. Phys.*

### بررسی بسامدهای تله برای اتم‌های $^{87}\text{Rb}$

در اینجا، با استفاده از عبارت‌های تحلیلی و با در نظر گرفتن اتم‌های  $^{87}\text{Rb}$  در حالت جستجوگر میدان مغناطیسی ضعیف  $F = 2$  و  $m_F = +2$ ، بسامدهای تله یک شبکه مغناطیسی دائمی دو لایه‌ای ایجاد شده توسط یک آرایه منفرد از آهنرباهای مربعی با مقادیر متناظر بین لایه‌های مغناطیسی در یک شبکه سه لایه‌ای مقایسه می‌شوند. پارامترهای ورودی در آخرین ستون (تحلیلی) جدول 1 آمده‌اند. طبق جدول 2، در شبکه سه لایه‌ای در مقایسه با دو لایه‌ای،  $W_z$  حدود 20 درصد افزایش را نشان می‌دهد. همچنین،  $W_x$  و  $W_y$  به ترتیب 25 و 17 درصد بیشتر هستند. شکل 6 تغییرات بسامدهای تله بین لایه‌ها را در یک شبکه بی‌نهایت نسبت به فاصله نسبی  $s/a$  بین لایه‌های مجاور نشان می‌دهد. براساس این شکل، با افزایش فاصله، بسامد تله بین لایه‌ها کاهش می‌یابد و همچنین مستقل از پارامترهای  $t$ ،  $M_z$ ،  $B_{1y}$ ،  $B_{1x}$  و  $a$ ، می‌توان بسامدهای تله را، با تغییر  $s$  هم کنترل کرد. در ضمن، با تغییر بسامد تله می‌توان پارامترهای دیگر از جمله ترازهای انرژی، فاصله بین آنها و همین‌طور عمق تله‌ها را در راستاهای مختلف تنظیم کرد.

12 (2010) 103029.

- [7] A. Mohammadi, S. Ghanbari and A. Pariz, A two-dimensional permanent magnetic lattice for ultracold atoms. *Phys. Scr.* 88 (2013) 015601.
- [8] A. L. La Rooij, S. Couet, M. C. van der Krogt, A. Vantomme, K. Temst, R. J. C. Spreeuw, Deposition and patterning of magnetic atom trap lattices in FePt films with periods down to 200 nm. *J. of Appl. Phys.* 124 (2018) 044902.
- [9] P. Karimi and S. Ghanbari, Analytic Expressions for a 2D Permanent Magnetic Lattice with a 3D Bias Magnetic Field for Ultracold Atoms. *J. Low Temp. Phys.* 192 (2018) 212–223.
- [10] A. L. La Rooij, H. B. van Linden van den Heuvel, and R. J. C. Spreeuw, Designs of magnetic atom-trap lattices for quantum simulation experiments. *Phys. Rev. A* 99 (2019) 022303.
- [11] H. Ott, J. Fortágh, G. Schlotterbeck, A. Grossmann, and C. Zimmermann, Bose-Einstein Condensation in a Surface Microtrap. *Phys. Rev. Lett.* 87 (2001) 230401.
- [12] E. A. Hinds and I. G. Hughes, Magnetic atom optics: mirrors, guides, traps, and chips for atoms. *J. Phys. D: Appl. Phys.* 32 (1999)

- R119–R146.
- [13] C. D. J. Sinclair, E. A. Curtis, I. Llorente Garcia, J. A. Retter, B. V. Hall, S. Eriksson, B. E. Sauer, and E. A. Hinds, Bose-Einstein condensation on a permanent-magnet atom chip. *Phys. Rev. A* 72 (2005) 031603(R).
- [14] I. Barb, R. Gerritsma, Y. T. Xing, J. B. Goedkoop and R. J. C. Spreeuw, Creating Ioffe-Pritchard micro-traps from permanent magnetic film with in-plane magnetization. *Eur. Phys. J. D* 35 (2005) 75–79.
- [15] C. D. J. Sinclair, E. A. Curtis, J. A. Retter, B. V. Hall, I. Llorente Garcia, S. Eriksson, B. E. Sauer and E. A. Hinds, Preparation of a Bose–Einstein condensate on a permanent-magnet atom chip. *J Phys: Conf. Series* 19 (2005) 74.
- [16] J. Yin, W. Gao, J. Hu and Y. Wang, Magnetic surface microtraps for realizing an array of alkali atomic Bose–Einstein condensates or Bose clusters. *Opt. Commun.* 206 (2002) 99–113.
- [17] A. Grabowski and T. Pfau, A lattice of magneto-optical and magnetic traps for cold atoms. *Eur. Phys. J. D* 22 (2003) 347–354.
- [18] A. Abdelrahman, M. Vasiliev, K. Alameh, and P. Hannaford, Asymmetrical two-dimensional magnetic lattices for ultracold atoms. *Phys. Rev. A* 82 (2010) 012320.
- [19] S. Ghanbari, A. Abdalrahman, A. Sidorov and P. Hannaford, Analysis of a simple square magnetic lattice for ultracold atoms. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* 47 (2014) 115301.
- [20] Y. Wang, P. Surendran, S. Jose, T. Tran, I. Herrera, S. Whitlock, R. McLean, A. Sidorov, P. Hannaford, Magnetic lattices for ultracold atoms and degenerate quantum gases. *Sci. Bull.* 61 (2016) 1097–1106.
- [21] S. Ghanbari, P. B. Blakie, P. Hannaford and T. D. Kieu, Superfluid to Mott insulator quantum phase transition in a 2D permanent magnetic lattice. *Eur. Phys. J. B* 70 (2009) 305–310.
- [22] M. Singh, M. Volk, A. Akulshin, A. Sidorov, R. McLean and P. Hannaford, One-dimensional lattice of permanent magnetic microtraps for ultracold atoms on an atom chip. *J. Phys. B: At. Mol Opt. Phys.* 41 (2008) 065301.
- [23] S. Jose, P. Surendran, Y. Wang, I. Herrera, L. Krzemien, S. Whitlock, R. McLean, A. Sidorov, and P. Hannaford, Periodic array of Bose-Einstein condensates in a magnetic lattice. *Phys. Rev. A* 89 (2014) 051602(R).
- [24] V. Y. F. Leung, D. R. M. Pijn, H. Schlatter, L. Torralbo-Campo, A. L. La Rooij, G. B. Mulder, J. Naber, M. L. Soudijn, A. Tauschinsky, C. Abarbanel, B. Hadad, E. Golan, R. Folman, R. J. C. Spreeuw, Magnetic-film atom chip with 10  $\mu\text{m}$  period lattices of microtraps for quantum information science with Rydberg atoms. *Rev Sci Instrum* 85 (2014) 053102.
- [25] P. Surendran, S. Jose, Y. Wang, I. Herrera, H. Hu, X. Liu, S. Whitlock, R. McLean, A. Sidorov, and P. Hannaford, Radio-frequency spectroscopy of a linear array of Bose-Einstein condensates in a magnetic lattice. *Phys. Rev. A* 91 (2015) 023605.
- [26] I. Herrera, Y. Wang, P. Michaux, D. Nissen, P. Surendran, S. Juodkazis, S. Whitlock, R. J. McLean, A. Sidorov, M. Albrecht and P. Hannaford, Sub-micron period lattice structures of magnetic microtraps for ultracold atoms on an atom chip. *J. Phys. D: Appl. Phys.* 48 (2015) 115002.
- [27] S. Whitlock, A. W. Glaetzle and P. Hannaford, Simulating quantum spin models using Rydberg-excited atomic ensembles in magnetic microtrap arrays. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* 50 (2017) 074001.
- [28] Y. Wang, T. Tran, P. Surendran, I. Herrera, A. Balcytis, D. Nissen, M. Albrecht, A. Sidorov, and P. Hannaford, Trapping ultracold atoms in a sub-micron-period triangular magnetic lattice. *Phys. Rev. A* 96 (2017) 013630.
- [29] D. Jaksch, C. Bruder, J. I. Cirac, C. W. Gardiner, and P. Zoller, Cold Bosonic Atoms in Optical Lattices. *Phys. Rev. Lett.* 81 (1998) 3108.
- [30] I. Bloch, Ultracold quantum gases in optical lattices. *Nature Physics* 1 (2005) 23–30.
- [31] B. Laburthe Tolra, K. M. O’Hara, J. H. Huckans, W. D. Phillips, S. L. Rolston, and J. V. Porto, Observation of Reduced Three-Body Recombination in a Correlated 1D Degenerate Bose Gas. *Phys. Rev. Lett.* 92 (2004) 190401.
- [32] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. W. Hänsch and I. Bloch, Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms. *Nature* 415 (2002) 39–44.
- [33] M. Greiner, O. Mandel, T. W. Hänsch and I. Bloch, Collapse and revival of the matter wave field of a Bose–Einstein condensate. *Nature* 419 (2002) 51.
- [34] C. Monroe, Quantum information

- processing with atoms and photons. *Nature* 416 (2002) 238–246.
- [35] T. Calarco, E. A. Hinds, D. Jaksch, J. Schmiedmayer, J. I. Cirac, and P. Zoller, Quantum gates with neutral atoms: Controlling collisional interactions in time-dependent traps. *Phys. Rev. A* 61 (2000) 022304.
- [36] U. Schneider, L. Hackermüller, S. Will, T. Best, I. Bloch, T. A. Costi, R. W. Helmes, D. Rasch and A. Rosch, Metallic and Insulating Phases of Repulsively Interacting Fermions in a 3D Optical Lattice. *Science* 322 (2008)1520–1525.
- [37] S. L. Campbell, R. B. Hutson, G. E. Marti, A. Goban, N. D. O’pong, R. L. McNally, L. Sonderhouse, J. M. Robinson, W. Zhang, B. J. Bloom and J. Ye, A Fermi-degenerate three-dimensional optical lattice clock. *Science* 358 (2017) 90–94.
- [38] C. Gross and I. Bloch, Quantum simulations with ultracold atoms in optical lattices. *Science* 357 (2017) 995–1001.
- [39] C. J. Pethick and H. Smith, Bose-Einstein condensation in dilute gases. (2008) 2nd Ed. (Cambridge Cambridge University Press, England).
- [40] R. Folman, Material science for quantum computing with atom chips. *Quantum Inf Process* 10 (2011) 995.
- [41] S. Whitlock, R. Gerritsma, T. Fernholz and R. J. C. Spreeuw, Two-dimensional array of microtraps with atomic shift register on a chip. *New Journal of Physics* 11 (2009) 023021.
- [42] J. Y. Wang, S. Whitlock, F. Scharnberg, D. S. Gough, A. I. Sidorov, R. J. McLean and P. Hannaford, Perpendicularly magnetized, grooved GdTbFeCo microstructures for atom optics. *J. Phys. D: Appl. Phys.* 38 (2005) 4015–4020.
- [43] Available from: <https://www.esrf.fr/Accelerators/Groups/InsertionDevices/Software/Radia>